

七年級試題選項分析與教學建議

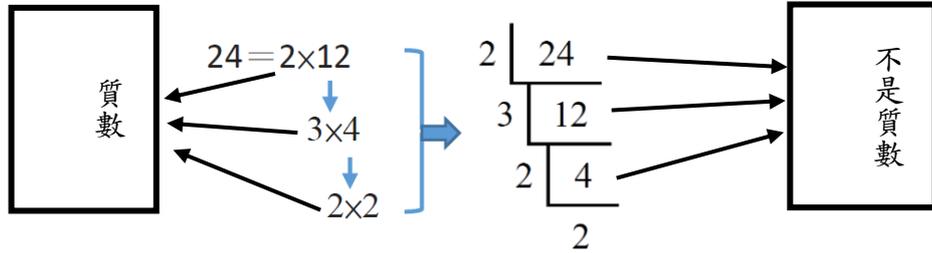
題號	1		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	A-7-5 二元一次聯立方程式的解法與應用：代入消去法；加減消去法；應用問題。		
試題內容	<p>1. 小歐在解一道卡牌問題，每張卡牌都只有一個數字。他只知道以下三個訊息：</p> <p style="padding-left: 2em;">訊息一：卡牌總共有 9 張。</p> <p style="padding-left: 2em;">訊息二：卡牌上的數字只有 2 種，分別為：2、5。</p> <p style="padding-left: 2em;">訊息三：所有卡牌的數字的總和為 27。</p> <p>請問卡牌中數字是 5 的有多少張？</p> <p style="padding-left: 2em;">(A)1</p> <p style="padding-left: 2em;">(B)2</p> <p style="padding-left: 2em;">(C)3</p> <p style="padding-left: 2em;">(D)4</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.05	0.13	0.01
2	0.07	0.18	0.00
3*	0.83	0.57	0.98
4	0.05	0.12	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.83	鑑別度	0.41
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.41，正確答案為選項C，通過率為83%，顯示超過八成的學生已具備二元一次聯立方程式解題的能力。</p> <p>2. 有5%的學生選擇A（低分組有13%），這些學生可能誤將9張視為數字和9，得$2 \times 2 + 5 = 9$，因此判斷數字2的有2張，數字5的有1張。這些學生可能尚未具備二元一次聯立方程式解題的能力。</p> <p>3. 有7%的學生選擇B（低分組有18%）、有5%的學生選擇D（低分組有12%），這些學生可能僅是猜測答案，尚未具備二元一次聯立方程式解題的能力。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。	A-7-5 二元一次聯立方程式的解法與應用：代入消去法；加減消去法；應用問題。	無
補救教學建議			
<p>(一) 複習二元一次聯立方程式解題的代入消去法，加減消去法。</p> <p>(二) 以本題為例，進行解題說明： 根據題意的訊息一及訊息二，可以知道數字 2 及數字 5 的數量共 9 張，以此進行假設數字 2 的有 x 張，數字 5 的有 y 張，則可列出張數的關係式： $x+y=9$。 由訊息三及上述的假設，可以列出總和的關係式：$2x+5y=27$ 將以上得到的兩個關係式合併成為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x + y = 9 \dots\dots\dots ① \\ 2x + 5y = 27 \dots\dots ② \end{cases}$ 接著再利用加減消去法進行解題 第①式$\times 2$ $\begin{cases} 2x + 2y = 18 \dots\dots ③ \\ 2x + 5y = 27 \dots\dots ② \end{cases}$ 第②式-第③式 $3y=9$，得 $y=3$</p>			

題號	2		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-7-1 100 以內的質數：質數和合數的定義；質數的篩法。		
試題內容	<p>2. 下圖是利用短除法對 90 做質因數分解的過程。</p> $ \begin{array}{r} 2 \overline{) 90} \\ \underline{180} \\ 3 \overline{) a} \\ \underline{30} \\ 3 \overline{) b} \\ \underline{c} \end{array} $ <p>請問下列敘述何者正確？</p> <p>(A) a 是質數 (B) b 是質數 (C) c 是質數 (D) 90 是質數</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.04	0.11	0.00
2	0.05	0.13	0.00
3*	0.85	0.60	0.99
4	0.07	0.15	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.85	鑑別度	0.39
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.39，正確答案為選項C，通過率為85%，顯示超過八成的學生已具備利用短除法做質因數分解的能力。</p> <p>2. 有 4%的學生選擇 A (低分組有 11%)、有 5%的學生選擇 B (低分組有 13%)、有 7%的學生選擇 D (低分組有 15%)，這些學生尚未具備利用短除法做質因數分解的能力。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-6-1 20 以內的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。	N-7-1 100 以內的質數：質數和合數的定義；質數的篩法。	N-7-2 質因數分解的標準分解式：質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。

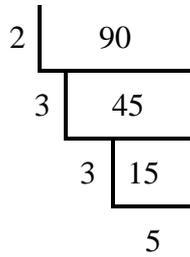
補救教學建議

(一) 複習如何運用短除法進行一個正整數的質因數分解。分解過程中，每個數都是質因數。以 24 為例，將 24 分解到不能再分解，就是將 24 寫成質因數的連乘積，其中的 2 和 3 都是質數，但 12 和 4 都不是質數。

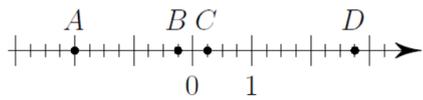


(二) 以本題目說明解題步驟。

方法一：認真的完成短除法，確認只有 c 是質數。



方法二：利用上述的結論思考，一定只有 c 是質數。

題號	3		
內容領域	數與量	認知歷程向度	解題思考
學習內容	<p>N-7-5 數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $a-b$ 表示數線上兩點 a, b 的距離。</p> <p>備註：絕對值引入的目的用於記錄數線上兩點的距離，不處理絕對值方程式和絕對值不等式。</p>		
試題內容	<p>3. 數線上 $A(a)$、$B(b)$、$C(c)$、$D(d)$ 四點的相對位置關係如下圖。</p>  <p>下列哪個選項的敘述是<u>錯誤</u>的？</p> <p>(A) C 點所表示的數為 $\frac{1}{4}$</p> <p>(B) $a < b < c < d$</p> <p>(C) b 和 c 互為相反數</p> <p>(D) $a < b < c < d$</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.07	0.19	0.00
2	0.07	0.17	0.01
3	0.07	0.18	0.01
4*	0.79	0.46	0.98
未作答	0.00		
通過率	0.79	鑑別度	0.52
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.52，正確答案為選項D，通過率為79%，顯示近八成的學生已理解數線與絕對值的意義及性質。</p> <p>2. 有7%的學生選擇A(低分組有19%)，有7%的學生選擇B(低分組有17%)，有7%的學生選擇C(低分組有18%)，這些學生可能誤解題意，以為要選出正確的答案。</p>			

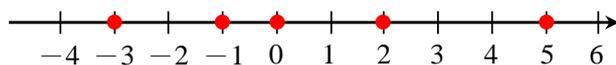
教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-3-11 整數數線：認識數線，含報讀與標示。連結數序、長度、尺的經驗，理解在數線上做比較、加、減的意義。備註：數線須從 0 開始。運用長度加減法 (N-2-11)，理解在數線上做加、減的意義。</p> <p>N-4-8 數線與分數、小數：連結分小數長度量的經驗。以標記和簡單的比較與計算，建立整數、分數、小數一體的認識。</p>	<p>N-7-5 數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $a-b$ 表示數線上兩點 a, b 的距離。備註：絕對值引入的目的用於記錄數線上兩點的距離，不處理絕對值方程式和絕對值不等式。</p>	<p>G-8-1 直角坐標系上兩點距離公式：直角坐標系上兩點 $A(a, b)$ 和 $B(c, d)$ 的距離為 $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$；生活上相關問題。</p>

補救教學建議

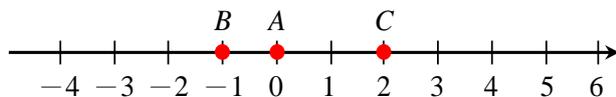
(一) 下面以「A 點的坐標為 0，B 點的坐標為 -1，C 點的坐標為 2，將 A、B、C 標示在數線上」為例，說明如何幫助學生解題。

1. 先幫學生複習在數線上標點，例如：0，-1，2，-3，5。



其中 $5 > 2 > 0 > -1 > -3$

2. 要求學生在數線上標出 A(0)，B(-1)，C(2)

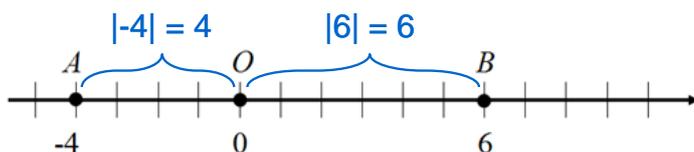


發現 $-1 < 0 < 2$ ，在數線上由左而右為 B、A、C。

3. 發現越右邊的點表示的數越大，越左邊的點表示的數越小。

(二) 複習絕對值的意義：

在數線上，一點 P 的坐標為 x ，則坐標 x 的絕對值代表 P 到原點的距離，例如：



A(-4)到原點的距離 = $|-4| = 4$ ，B(6)到原點的距離 = $|6| = 6$

題號	4		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-7-4 數的運算規律：交換律；結合律；分配律； $-(a+b)=-a-b$ ； $-(a-b)=-a+b$ 。		
試題內容	4. 計算 $1234 \times (66 + 55) - 1234 \times (65 + 54) = ?$ (A)1 (B)2 (C)1234 (D)2468		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.14	0.01
2	0.19	0.26	0.07
3	0.12	0.21	0.06
4*	0.63	0.39	0.86
未作答	0.00		
通過率	0.63	鑑別度	0.47
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.47，正確答案為選項D，通過率為63%，顯示超過六成的學生已具備利用分配律簡化計算的能力。</p> <p>2. 有6%的學生選擇A(低分組有14%)，這些學生可能僅是猜測答案，尚未具備利用分配律簡化計算的能力。</p> <p>3. 有19%的學生選擇B(低分組有26%)，這些學生可能忽略1234，只計算$(66+55)-(65+54)=2$，這些學生可能尚未具備利用分配律簡化計算的能力。</p> <p>4. 有12%的學生選擇C(低分組有21%)，這些學生可能忽略$(66+55)-(65+54)$，認為答案是1234或以為$(66+55)-(65+54)=1$，而計算結果為1234，這些學生可能尚未具備利用分配律簡化計算的能力。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。	N-7-4 數的運算規律：交換律；結合律；分配律； $-(a+b)=-a-b$ ； $-(a-b)=-a+b$ 。	N-8-1 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。

(一) 複習分配律。

$$(b+c) \times a = a \times (b+c) = a \times b + a \times c \quad (b-c) \times a = a \times (b-c) = a \times b - a \times c$$

例一：以「老師將班上同學分組進行教學，每組有男生 2 人，女生 3 人，共 5 組，全班學生共有多少人？」為例，說明分配律 $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$ 。

方法 1：合起來算

先算每組有 2 位男生，3 位女生合起來的人數，再計算 5 組的人數，算式可記成 $(2+3) \times 5 = 25$ ，所以共 25 人。

方法 2：分開算

先分別算出 5 組男生的人數和女生人數，再合起來計算全班人數，算式可記成 $2 \times 5 + 3 \times 5 = 25$ ，所以共 25 人。

初步發現：無論方法 1：合起來算，還是方法 2：分開算的結果都是 25 人，所以「 $(2+3) \times 5 = 2 \times 5 + 3 \times 5$ 」。

進階覺察：因為都是同一個問題，答案只有一個。只是方法 1 和方法 2 不同的算法，所以不必算出答案，就可以知道

$$「(2+3) \times 5 = 2 \times 5 + 3 \times 5」。$$

小結論：所以 $(2+3) \times 5 = 2 \times 5 + 3 \times 5$

例二：再以「老師請班上 25 位同學每人一杯原價 50 元飲料，結帳時使用每杯現折 3 元的折價券 25 張，老師須再付多少錢？」為例，說明分配律 $(a-b) \times c = a \times c - b \times c$ 。

方法 1：合起來算

先算一杯折價後的金額，再計算需付的金額，算式可記成 $(50-3) \times 25$

方法 2：分開算

先分別算出原先要付的總金額和折價的總金額，再合起來計算最後需付的金額，算式可記成 $50 \times 25 - 3 \times 25$

發現覺察：由例一的經驗，例二可以不用計算出結果就覺察出「因為都是同一個問題，只是不同的算法，所以結果一定會相等。」

小結論：所以 $(50-3) \times 25 = 50 \times 25 - 3 \times 25$

結論： $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$ ， $(a-b) \times c = a \times c - b \times c$

(二) 以本題為例，進行解題說明。

$$\begin{aligned} & 1234 \times (66+55) - 1234 \times (65+54) \\ &= 1234 \times 121 - 1234 \times 119 \quad <\text{有相同的數 } 1234, \text{ 便可以利用分配律}> \\ &= 1234 \times (121-119) \\ &= 1234 \times 2 \\ &= 2468 \end{aligned}$$

題號	5		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。		
試題內容	<p>5. 解一元一次方程式 $3 - 2x = x + 18$，$x = ?$</p> <p>(A)15</p> <p>(B)5</p> <p>(C)-5</p> <p>(D)-15</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.10	0.24	0.01
2	0.09	0.23	0.01
3*	0.72	0.35	0.96
4	0.08	0.17	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.72	鑑別度	0.61
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.61，正確答案為選項C，通過率為72%，顯示七成的學生已具備利用移項法則或等量公理解一元一次方程式的能力。</p> <p>2. 有10%的學生選擇A(低分組有24%)，這些學生可能對加減的移項觀念不正確($-2x+x=18-3 \rightarrow -x=15$)，在除以負數的移項觀念也不正確($x=15$)，尚未具備利用移項法則或等量公理解一元一次方程式的能力。</p> <p>3. 有9%的學生選擇B(低分組有23%)，這些學生可能在加減的移項觀念正確($-2x-x=18-3 \rightarrow -3x=15$)，但在除以負數的移項觀念不正確($x=15 \div 3 \rightarrow x=5$)，尚未具備利用移項法則或等量公理解一元一次方程式的能力。</p> <p>4. 有8%的學生選擇D(低分組有17%)，這些學生可能對加減的移項觀念不正確($-2x+x=18-3 \rightarrow -x=15$)，但在除以負數的移項概念正確($x=15 \div (-1) \rightarrow x=-15$)，尚未具備利用移項法則或等量公理解一元一次方程式的能力。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	無	A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。	A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。

補救教學建議

- (一) 1. 複習以未知數代表數列式。
 2. 複習一元一次方程式的解的意義。
 3. 複習利用等量公理或移項法解一元一次方程式。
- (二) 先以實例以列表的方式幫助學生找解，其次再說明等量公理的意義，加深等號兩邊同時加減或乘除一數等號仍成立，最後利用等量公理或移項法解一元一次方程式。

例一：小強想存錢買生日禮物給媽媽，禮物需要 570 元，阿凱目前有 170 元，每週存 50 元，幾週後就可以存到買禮物的錢呢？

1. 引導學生思考 570 先減掉現有的 170 元，再除以 50，滿幾個 50 就是幾週。
 依題意可列式為 $170+50x=570$ 。
 2. 將 x 由小到大代值列表：

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$170+50x$	170	220	270	320	370	420	470	520	570

因此，解為 $x=8$ 。

3. 如果代值很不容易找到解，可以利用等量公理或移項法解一元一次方程式。
 假設需要 x 週，依據禮物的金額可列出下列一元一次方程式。

$$170 + 50x = 570$$

$$\begin{array}{ccc} \text{減去已有的 170} & \downarrow & \downarrow \text{減去已有的 170} \\ & 50x & = 400 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{除掉倍數(每週 50)} & \downarrow & \downarrow \text{除掉倍數(每週 50)} \\ & x & = 8 \end{array}$$

例二：安安在桌上放了一盒 24 顆的巧克力在桌上，晚餐後想吃一顆，結果發現只剩下 7 顆，請問被吃掉了幾顆呢？

1. 引導學生思考把剩下的和吃掉的就是全部的
 2. 假設吃掉 x 顆，依據剩下 7 顆可列出下列一元一次方程式。

$$24 - x = 7$$

$$\begin{array}{ccc} \text{加回吃掉的 } x & \downarrow & \downarrow \text{加回吃掉的 } x \\ & 24 & = 7 + x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{減掉剩下的 7} & \downarrow & \downarrow \text{減掉剩下的 7} \\ & x & = 17 \end{array}$$

(三) 以此題為例：

$$\begin{array}{ccc} 3 - 2x = x + 18 & & \\ \text{加回 } 2x \downarrow & & \downarrow \text{加回 } 2x \\ 3 = 3x + 18 & & \\ \text{減掉 } 18 \downarrow & & \downarrow \text{減掉 } 18 \\ -15 = 3x & & \\ \text{除以倍數 } 3 \downarrow & & \downarrow \text{除以倍數 } 3 \\ -5 = x & & \end{array}$$

題號	6		
內容領域	空間與形狀與坐標幾何	認知歷程向度	程序執行
學習內容	G-7-1 平面直角坐標系：以平面直角坐標系、方位距離標定位置；平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。		
試題內容	<p>6. 坐標平面上有一點 $P(5, -2)$，向上移動 3 單位，向左移動 7 單位，請問 P 點會移動到哪個象限？</p> <p>(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.15	0.00
2*	0.79	0.51	0.96
3	0.07	0.18	0.01
4	0.08	0.15	0.03
未作答	0.00		
通過率	0.79	鑑別度	0.45
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.45，正確答案為選項B，通過率為79%，顯示近八成的學生已理解平面直角坐標象限的意義。</p> <p>2. 有6%的學生選擇A（低分組有15%），這些學生在移動點的過程中未考慮方向性或不曉得某個方向要改變哪個坐標，可能錯誤如下： $P(5, -2)$上移3及左移7之後為$P(5 + 3, -2 + 7) = P(8, 5)$，誤以為在第一象限。</p> <p>3. 有7%的學生選擇C（低分組有18%），這些學生可能錯誤如下： $P(5, -2)$上移3及左移7後計算錯誤變為$P(5 - 7, -2 - 3) = P(-2, -5)$，誤以為在第三象限。</p> <p>4. 有8%的學生選擇D（低分組有15%），這些學生可能錯誤如下： $P(5, -2)$上移3及左移7後計算錯誤變為$P(5 + 3, -2 - 7) = P(8, -9)$，誤以為在第四象限。</p>			

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-7-5 數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $ a-b $ 表示數線上兩點 a, b 的距離。 備註：絕對值引入的目的用於記錄數線上兩點的距離，不處理絕對值方程式和絕對值不等式。	G-7-1 平面直角坐標系：以平面直角坐標系、方位距離標定位置；平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。	G-8-1 直角坐標系上兩點距離公式：直角坐標系上兩點 $A(a, b)$ 和 $B(c, d)$ 的距離為 $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ ；生活上相關問題。

補救教學建議

下面以「坐標平面上有一點 $A(1,2)$ ，先向右移動2單位，再向上移動3單位，請問會移動到哪一個象限？」為例，說明如何幫助學生解題。

(一) 首先描繪 $A(1,2)$ 在直角坐標平面，說明在原點位置向右走1個單位，再向上走2個單位到 A 點；也可以在原點位置向上走2個單位，再向右走1個單位到 A 點。

(二) 接著說明由 $A(1,2)$ 向右移動2單位，坐標為 $(1+2, 2) = (3, 2)$ ；

$A(1,2)$ 向左移動2單位，坐標為 $(1-2, 2) = (-1, 2)$ ；

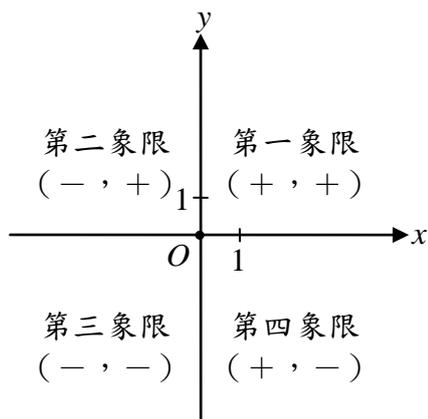
$A(1,2)$ 向上移動2單位，坐標為 $(1, 2+2) = (1, 4)$ ；

$A(1,2)$ 向下移動2單位，坐標為 $(1, 2-2) = (1, 0)$ 。

(三) 再舉一些例子讓學生練習，例如： $(2, -3)$ 向左移動2單位，再向上移動1單位的點為 $(2-2, -3+1) = (0, -2)$ ；

$(-2, 1)$ 向右移動3單位，再向下移動1單位的點為 $(-2+3, 1-1) = (1, 0)$ 。

(四) 理解象限的意義



1. 在第一象限內的點，坐標的性質符號為 $(+, +)$ ，例如： $(1, 2)$ 。
2. 在第二象限內的點，坐標的性質符號為 $(-, +)$ ，例如： $(-1, 2)$ 。
3. 在第三象限內的點，坐標的性質符號為 $(-, -)$ ，例如： $(-1, -2)$ 。
4. 在第四象限內的點，坐標的性質符號為 $(+, -)$ ，例如： $(1, -2)$ 。
5. x 軸與 y 軸上的點，不屬於任何一個象限。

題號	7		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-7-4 二元一次聯立方程式的意義：二元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次方程式；二元一次聯立方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次聯立方程式。		
試題內容	<p>7. 下列各組二元一次聯立方程式，何者的解<u>不是</u> $x=1$，$y=2$？</p> <p>(A) $\begin{cases} 2x = 2 \\ 6x - y = 4 \end{cases}$</p> <p>(B) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$</p> <p>(C) $\begin{cases} x + y = 3 \\ -3x + 5y = 7 \end{cases}$</p> <p>(D) $\begin{cases} 6x - y = 4 \\ -3x + 5y = 7 \end{cases}$</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.18	0.00
2*	0.82	0.48	1.00
3	0.07	0.20	0.00
4	0.05	0.14	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.82	鑑別度	0.52
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.52，正確答案為選項B，通過率為82%，顯示八成的學生已掌握二元一次聯立方程式解的意義。</p> <p>2. 有6%的學生選擇A(低分組有18%)，有7%的學生選擇C(低分組有20%)，有5%的學生選擇D(低分組有14%)，這些學生可能誤以為是要找其解是$x=1$，$y=2$，驗算時皆符合，而選擇該答案，這些學生可能部分掌握二元一次聯立方程式解的意義。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	A-7-2 一元一次方程式的意義： 一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。	A-7-4 二元一次聯立方程式的意義： 二元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次方程式；二元一次聯立方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次聯立方程式。	無

(一) 複習二元一次聯立方程式解的意義。

以「小桐有 60 元，要全部拿來買郵票，郵票分面額 5 元及 10 元兩種，一共買到 9 張郵票。若設共購買 5 元郵票 x 張及 10 元郵票 y 張，列出二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x + y = 9 \\ 5x + 10y = 60 \end{cases}$ ，並了解該解對二元一次聯立方程式的意義」為例，說明二元一次聯立方程式及其解的意義。

1. 舉 x 、 y 不是解的例子，以 5 元買 5 張($x = 5$)，10 元買 4 張($y = 4$)為例，幫學生察覺：將 $x=5$ ， $y=4$ 代入 $x+y=5+4=9$ ，則 $x=5$ ， $y=4$ 符合題意，是方程式 $x + y = 9$ 的一組解。

將 $x=5$ ， $y=4$ 代入 $5x + 10y = 5 \times 5 + 10 \times 4 = 65 \neq 60$ ，則 $x=5$ ， $y=4$ 不符合題意，不是方程式 $5x + 10y = 60$ 的一組解。

顯然 5 元 5 張及 10 元 4 張滿足了 9 張的條件，但不滿足合計 60 元的條件，那就不會是小桐買的數量，也就表示 $x = 5$ ， $y = 4$ 不是聯立方程式的解。

2. 舉 x 、 y 是解的例子，以 5 元買 6 張($x = 6$)，10 元買 3 張($y = 3$)為例，幫學生察覺：

將 $x = 6$ ， $y = 3$ 代入 $x + y = 6 + 3 = 9$ ，則 $x = 6$ ， $y = 3$ 符合題意，是方程式 $x + y = 9$ 的一組解。

將 $x = 6$ ， $y = 3$ 代入 $5x + 10y = 5 \times 6 + 10 \times 3 = 60$ ，則 $x = 6$ ， $y = 3$ 符合題意，是方程式 $5x + 10y = 60$ 的一組解。

顯然 5 元 6 張及 10 元 3 張滿足了 9 張的條件，同時也滿足合計 60 元的條件，那就是小桐買的數量，也就表示 $x=6$ ， $y=3$ 是聯立方程式 $\begin{cases} x + y = 9 \\ 5x + 10y = 60 \end{cases}$ 的解。

結論：是不是聯立方程式的解？必須將預想的 x 值及 y 值代入兩個方程式進行檢驗，當同時都符合題意時就是聯立方程式的解。

(二) 以本題為例，進行解題說明。

符合二元一次聯立方程式的解，即表示將其 x 、 y 的值代入兩個方程式皆成立。

若只滿足其中一個方程式，則不是聯立方程式的解

選項(A)。將 $x=1$ 、 $y=2$ 代入

$$\begin{cases} 2 \times 1 = 2 \\ 6 \times 1 - 2 = 4 \end{cases} \quad \text{兩式皆成立，所以 } x=1、y=2 \text{ 是聯立方程式的解}$$

選項(B)。將 $x=1$ 、 $y=2$ 代入

$$\begin{cases} 1 + 2 = 3 \\ 1 - 2 \times 2 = -3 \neq 8 \end{cases}$$

第二式不成立，所以 $x=1$ 、 $y=2$ 不是聯立方程式的解

題號	8		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-7-9 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。 備註：不涉及使用繁分數，遇到兩分數之比時，以分數相除處理之。		
試題內容	<p>8. 已知 $x:y = 3:2$，下列敘述何者正確？</p> <p>(A) $x + y = 5$</p> <p>(B) $x - y = 1$</p> <p>(C) $x \times y = 6$</p> <p>(D) $x \div y = \frac{3}{2}$</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.26	0.03
2	0.05	0.13	0.01
3	0.13	0.21	0.04
4*	0.67	0.39	0.93
未作答	0.00		
通過率	0.67	鑑別度	0.54
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.54，正確答案為選項D，通過率為67%，顯示近七成的學生已掌握比的基本概念。</p> <p>2. 有15%的學生選擇A(低分組有26%)，這些學生誤以為$x=3, y=2, x+y=3+2=5$，尚未掌握比的基本概念。</p> <p>3. 有5%的學生選擇B(低分組有13%)，這些學生誤以為$x=3, y=2, x-y=3-2=1$，尚未掌握比的基本概念。</p> <p>4. 有13%的學生選擇C(低分組有21%)，這些學生誤以為$x=3, y=2, x \times y=2 \times 3=6$，尚未掌握比的基本概念。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-6-6 比與比值：異類量的比與同類量的比之比值的意義。理解相等的比中牽涉到的兩種倍數關係（比例思考的基礎）。解決比的應用問題。 備註：比中各數原則上為整數，但也可包含簡單之小數與分數。	N-7-9 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。 備註：不涉及使用繁分數，遇到兩分數之比時，以分數相除處理之。	S-8-8 三角形的基本性質：等腰三角形兩底角相等；非等腰三角形大角對大邊，大邊對大角；三角形兩邊和大於第三邊；外角等於其內對角和。

補救教學建議

(一) 複習比例式比值、倍數的概念

以調 1 杯黑糖奶茶需要黑糖糖漿 30 克和鮮奶 200c.c. 為例。

1. 想做 5 杯相同口味的黑糖奶茶，每種材料各需要多少呢？



我們用比(：)來比出口味，用等號來表現口味(比例)相同。

2. 黑糖糖漿和鮮奶有固定倍數關係嗎？



可以多舉幾個例子讓學生對黑糖糖漿與鮮奶有固定倍數關係加深印象。

3. 假設用 x 克黑糖糖漿和 y c.c. 鮮奶可以調出相同口味的黑糖奶茶，則

	黑糖糖漿(克)	:	鮮奶(c.c.)
	x	:	y
=	30	:	200
=	150	:	1000
=	3	:	20
=	$3m$:	$20m$

跟學生澄清 x 和 y 的值是變動的， x 與 y 的值不固定，可共同放大所小相同倍數，因此我們可以假設 $x=3m$ ， $y=20m$ ， $m \neq 0$ 。

(二) 以本題為例 $x:y=3:2$ ，我們可以假設 $x=3m$ ， $y=2m$ ， $m \neq 0$ 。

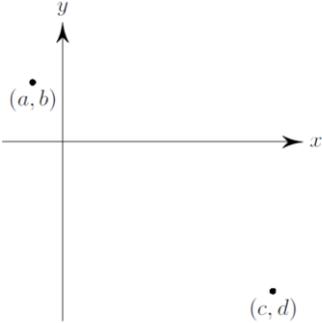
1. $x+y=3m+2m=5m$ ，不一定等於5。
2. $x-y=3m-2m=m$ ，不一定等於1。
3. $x \times y=3m \times 2m=6m^2$ ，不一定等於6。
4. 只有 x 和 y 的倍數關係 $x \div y=(3m) \div (2m)=\frac{3}{2}$ 。

題號	9		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	概念理解
學習內容	A-7-2 一元一次方程式的意義：一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。		
試題內容	<p>9. 已知小美今年 13 歲，小美父親今年 48 歲。經過 x 年後，父親年齡是小美年齡的 2 倍，下列哪個選項的列式符合上述題意？</p> <p>(A) $48 = 2(x + 13)$</p> <p>(B) $48 - 13 = 2x$</p> <p>(C) $48 + x = 2 \times 13$</p> <p>(D) $48 + x = 2(x + 13)$</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.11	0.25	0.01
2	0.06	0.16	0.00
3	0.11	0.26	0.01
4*	0.73	0.33	0.98
未作答	0.00		
通過率	0.73	鑑別度	0.66
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為 0.66，正確答案為選項 D，通過率為 73%，顯示七成的學生已具備由具體一元一次方程式列式的能力。</p> <p>2. 有 11% 的學生選擇 A (低分組有 25%)，這些學生可能忘了考慮父親也要計算 x 年後的年齡。</p> <p>3. 有 6% 的學生選擇 B (低分組有 16%)，這些學生可能誤解題意，以為小美與父親兩人年齡相差 x 歲的兩倍。</p> <p>4. 有 11% 的學生選擇 C (低分組有 33%)，這些學生可能忘了考慮小美也要計算 x 年後的年齡。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。</p> <p>R-4-2 四則計算規律（I）：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。</p>	<p>A-7-2 一元一次方程式的意義：一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。</p>	<p>A-7-4 二元一次聯立方程式的意義：二元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次方程式；二元一次聯立方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次聯立方程式。</p>
補救教學建議			
<p>以『「志明今年 18 歲，志明的媽媽今年 48 歲，在 x 年前，志明媽媽的年齡是志明年齡的 2 倍，請問 $x=?$」，請根據題意列出方程式。』為例，說明如何幫助學生列式。</p> <p>建議透過下列三個步驟，幫助學生利用含有未知數符號的關係式來列式：</p> <p>步驟一：先說明志明 3 年前的年齡為 $(18-3)$ 歲，志明媽媽 3 年前的年齡為 $(48-3)$ 歲。</p> <p>其次說明，志明 x 年前的年齡為 $(18-x)$ 歲，志明媽媽 x 年前的年齡為 $(48-x)$ 歲。</p> <p>步驟二：將志明媽媽 x 年前的年齡是志明 x 年前的年齡的兩倍轉換成數學關係式如下：</p> <p>「志明媽媽 x 年前的年齡」= $2 \times$ 「志明 x 年前的年齡」。</p> <p>步驟三：轉換成含有未知數符號的關係式如下：</p> $(48-x) = 2 \times (18-x), 48-x = 2(18-x)$			

題號	10		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-7-6 指數的意義：指數為非負整數的次方； $a \neq 0$ 時 $a^0=1$ ；同底數的大小比較；指數的運算。		
試題內容	<p>10. 已知 $a = 3^2 \times 5^2 \times 7^2$、$b = 3^3 \times 5 \times 7^2$、$c = 3^3 \times 5^2 \times 7$，請問 a、b、c 的大小關係為何？</p> <p>(A) $a > b > c$</p> <p>(B) $a > c > b$</p> <p>(C) $b > c > a$</p> <p>(D) $b > a > c$</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.66	0.36	0.89
2	0.16	0.28	0.06
3	0.10	0.21	0.02
4	0.07	0.14	0.03
未作答	0.00		
通過率	0.66	鑑別度	0.53
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.53，正確答案為選項A，通過率為66%，顯示超過六成的學生已理解指數的意義。</p> <p>2. 有16%的學生選擇B(低分組有28%)，這些學生可能將底數與次方相加後再相乘，$a=(3+2) \times (5+2) \times (7+2)=315$、$b=(3+3) \times (5+0) \times (7+2)=270$、$c=(3+3) \times (5+2) \times (7+0)=294$，這些學生可能尚未理解指數的意義。</p> <p>3. 有10%的學生選擇C(低分組有21%)，這些學生可能先從各數最前面底數3的次方比較，再比較底數5的次方，而得到$b > c > a$的關係，這些學生可能尚未理解指數的意義。</p> <p>4. 有7%的學生選擇D(低分組有14%)，這些學生可能僅是猜測答案，尚未理解指數的意義。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-6-1 20 以內的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。	N-7-6 指數的意義：指數為非負整數的次方； $a \neq 0$ 時 $a^0=1$ ；同底數的大小比較；指數的運算。	無
補救教學建議			
<p>(一) 複習指數的意義及其運算。</p> <p>(二) 以本題為例，進行解題說明。</p> <p>三個數皆有底數為 3、5、7。透過指數的運算分式，可將三個數相同底數一樣的次方先提出，也就是提公因數的概念。</p> $a=3^2 \times 5^2 \times 7^2=(3 \times 3 \times 5 \times 7) \times 5 \times 7=(3 \times 3 \times 5 \times 7) \times 35$ $b=3^3 \times 5 \times 7^2=(3 \times 3 \times 5 \times 7) \times 3 \times 7=(3 \times 3 \times 5 \times 7) \times 21$ $c=3^3 \times 5^2 \times 7=(3 \times 3 \times 5 \times 7) \times 3 \times 5=(3 \times 3 \times 5 \times 7) \times 15$ <p>$3 \times 3 \times 5 \times 7$ 為正數，且 $35 > 21 > 15$，所以 $a > b > c$。</p>			

題號	11		
內容領域	空間與形狀與坐標幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	G-7-1 平面直角坐標系：以平面直角坐標系、方位距離標定位置；平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。		
試題內容	<p>11. 如圖，直角坐標平面上有兩點 (a, b)、(c, d)。</p>  <p>下列敘述何者正確？</p> <p>(A) $a > c$ 且 $b < d$</p> <p>(B) $a > c$ 且 $b > d$</p> <p>(C) $a < c$ 且 $b < d$</p> <p>(D) $a < c$ 且 $b > d$</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.11	0.21	0.04
2	0.08	0.22	0.00
3*	0.71	0.35	0.95
4	0.10	0.22	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.71	鑑別度	0.60
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為 0.60，正確答案為選項 C，通過率為 71%，顯示七成的學生已具備在平面直角坐標系方位距離標定位置的能力。</p> <p>2. 有 11% 的學生選擇 A（低分組有 21%），這些學生對 x 坐標的大小概念不正確，但對 y 坐標絕對值得大小判斷正確，尚未具備在平面直角坐標系方位距離標定位置的能力。</p> <p>3. 有 8% 的學生選擇 B（低分組有 22%），這些學生對 x 坐標的大小概念不正確，對 y 坐標絕對值得大小判斷也不正確，尚未具備在平面直角坐標系方位距離標定位置的能力。</p> <p>4. 有 10% 的學生選擇 D（低分組有 22%），這些學生對 x 坐標的大小概念正確，但對 y 坐標絕對值得大小判斷不正確，尚未具備在平面直角坐標系方位距離標定位置的能力。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>S-6-2 解題：地圖比例尺。地圖比例尺之意義、記號與應用。地圖上兩邊長的比和實際兩邊長的比相等。 備註：含處理兩張地圖之間的長度關係。處理以為「比例分母愈大，相對邊長也愈大」的常見錯誤。</p>	<p>G-7-1 平面直角坐標系：以平面直角坐標系、方位距離標定位置；平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。</p>	<p>G-8-1 直角坐標系上兩點距離公式：直角坐標系上兩點$A(a,b)$和$B(c,d)$的距離為 $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$； 生活上相關問題。</p>
補救教學建議			
<p>(一) 1. 複習直角坐標平面上的點標示。 2. 複習坐標平面上的點與坐標軸距離和其坐標之間的關係。 3. 複習絕對值的意義。以圖形標示各點的 x 坐標 y 坐標以及 x 與 y。</p> <p>(二) 以本題為例說明： 直角坐標平面是由兩條互相垂直的數線 x 軸與 y 軸構成的，並將原點、x 軸的點和 y 軸的點等 3 個頂點形成的長方形之第四個頂點，以 x 軸的點坐標和 y 軸的點坐標合併組成序對表示。 因此，先劃出以點 (a,b) 與原點為對頂點、坐標軸為邊的長方形，同理也畫出以點 (c,d) 與原點為對頂點、坐標軸為邊的長方形，並標示它們對應 x 軸的點坐標和 y 軸的點坐標，如下圖：</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>由上圖知 $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$。 因為絕對值在數線上表示與原點的距離，得 $c > a$ 和 $d > b$， 故由圖可知，$a < 0 < c, b < d$。</p>			

題號	12		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-7-3 負數與數的四則混合運算(含分數、小數)：使用「正、負」表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算。		
試題內容	<p>12. 計算 $3 - 2 \div \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{5}{3}$ 的值為何？</p> <p>(A) $7\frac{2}{3}$</p> <p>(B) 6</p> <p>(C) $3\frac{1}{3}$</p> <p>(D) 0</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.19	0.04
2*	0.56	0.27	0.85
3	0.21	0.32	0.08
4	0.11	0.21	0.03
未作答	0.00		
通過率	0.56	鑑別度	0.59
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.59，正確答案為選項B，通過率為56%，顯示五成六的學生已具備數的四則混合運算計算能力。</p> <p>2. 有12%的學生選擇A(低分組有19%)，這些學生可能誤解題意以為算式如下：</p> $3 - 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{5}{3} = 3 + 3 + 1\frac{2}{3} = 7\frac{2}{3}$ <p>3. 有21%的學生選擇C(低分組有32%)，這些學生可能計算錯誤如下：</p> $3 - 2 \div \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{5}{3} = 3 - 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{5}{3} = 3 - \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ <p>4. 有11%的學生選擇D(低分組有21%)，這些學生可能計算錯誤如下：</p> $3 - 2 \div \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{5}{3} = 1 \div \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{5}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{3}{3} = 1$			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。</p> <p>R-4-2 四則計算規律（I）：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。</p>	<p>N-7-3 負數與數的四則混合運算(含分數、小數)：使用「正、負」表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算。</p>	<p>A-7-1 代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題。</p>
補救教學建議			
<p>下面先說明「多步驟運算次序」的意義，再說明如何幫助學生解題：</p> <p>(一) 多步驟運算次序的意義</p> <p>「括號先算」、「先乘除後加減」、「由左往右算」都是摘要的說法，它們不是三個獨立的口訣，它們之間有先後運算的關係，多步驟問題運算次序的約定如下：</p> <p>步驟一：括號的部份要先算(簡稱為「括號先算」)。</p> <p>步驟二：包含「乘、除」和「加、減」運算符號的算式，但是沒有括號，先計算「乘、除」部分，再計算「加、減」。(簡稱為「先乘除後加減」)。</p> <p>步驟三：當我們要計算乘和除的部份，而沒有括號時，我們由最左邊開始往右邊依序計算；當乘除都算完，只剩下加和減的部份，而沒有括號時，我們由最左邊開始往右邊依序計算(合併簡稱為由左往右算)。</p> <p>(二) 幫助學生解題</p> <p>建議教師透過下面的步驟，幫助學生掌握多步驟計算題運算次序的約定。</p> <p>步驟一：舉例說明兩步驟計算問題的運算次序，兩步驟計算問題只用到「括號先算」、「先乘除後加減」、「由左往右算」其中一個約定。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 括號先算：$13 - (2 + 5) = 13 - 7$，$7 \times (5 - 2) = 7 \times 3$ 2. 先乘除後加減：$5 + 3 \times 4 = 5 + 12$，$12 - 6 \div 2 = 12 - 3$ 3. 由左往右算：$12 + 3 - 5 = 15 - 5$，$12 \div 3 \times 2 = 4 \times 2$ <p>步驟二：舉例說明三步驟計算問題的運算次序</p> <p>三步驟計算問題同時用到「括號先算」、「先乘除後加減」、「由左往右算」其中兩個約定。</p>			

1. 括號先算，再先乘除後加減：

$$21 + (2 + 5) \times 2 = 21 + 7 \times 2 = 21 + 14,$$

$$42 - 3 \times (7 - 2) = 42 - 3 \times 5 = 42 - 15$$

2. 括號先算，再由左往右算：

$$21 - (3 + 5) - 2 = 21 - 8 - 2 = 13 - 2$$

$$12 - 3 - (2 + 5) = 12 - 3 - 7 = 9 - 7$$

3. 先乘除後加減，再由左往右算：

$$12 + 3 \times 5 - 4 = 12 + 15 - 4 = 27 - 4$$

$$12 - 3 + 12 \div 2 = 12 - 3 + 6 = 9 + 6$$

步驟三：舉例說明多步驟計算問題的運算次序

多步驟計算問題可能同時用到「括號先算」、「先乘除後加減」、「由左往右算」三個約定。

$$12 + 6 \times 4 \div (3 + 5) + 7$$

$$= 12 + 6 \times 4 \div 8 + 7$$

$$= 12 + 24 \div 8 + 7$$

$$= 12 + 3 + 7 = 15 + 7$$

步驟四：舉例說明算式中有兩個小括號時，依由左往右算的順序，

先算左邊的小括號，再算右邊的小括號，沒有小括號後，

再依先「先乘除後加減」、再「由左往右算」的順序解題。

$$(14 + 16) \times 12 \div (36 - 30) + 215$$

$$= 30 \times 12 \div (36 - 30) + 215$$

$$= 30 \times 12 \div 6 + 215$$

$$= 360 \div 6 + 215$$

$$= 60 + 215 = 275$$

步驟五：多舉一些例子，幫助學生熟悉「括號先算」、「先乘除後加減」、「由左往右算」運算次序的約定。

步驟六：異分母加減計算

1. 利用兩分數分母的公倍數為公分母來作計算：

$\frac{3}{4}$ 等值分數的分母：4、8、12、16、20、24、28、...

$\frac{1}{3}$ 等值分數的分母：3、6、9、12、15、18、21、24、27、...

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}, \frac{1}{3} = \frac{4}{12}, \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}。$$

※建議教師視學習情況，幫助學生求出4和3最小公倍數。

2. 分數與整數的加減計算：

將整數化成與分數相同分母的等值分數，再進行加減計算；

或先進行分數部分的計算，再加上整數。

題號	13		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	概念理解
學習內容	A-7-1 代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題。		
試題內容	13. 化簡 $3(2x - 8) - \frac{1}{2}(6x + 2) = ?$ (A) $3x - 6$ (B) $3x - 7$ (C) $3x - 23$ (D) $3x - 25$		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.08	0.20	0.00
2	0.09	0.21	0.01
3	0.24	0.34	0.12
4*	0.59	0.25	0.87
未作答	0.00		
通過率	0.59	鑑別度	0.62
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為0.62，正確答案為選項D，通過率為59%，顯示近六成的學生已具備一元一次式化簡的能力。 2. 有8%的學生選擇A(低分組有20%)，這些學生可能錯誤使用分配律的運算，化簡過程為 $3(2x - 8) - \frac{1}{2}(6x + 2) = 6x - 8 - 3x + 2 = 3x - 6$ ，這些學生可能尚未具備一元一次式化簡的能力。 3. 有9%的學生選擇B(低分組有13%)，這些學生可能錯誤使用分配律的運算，化簡過程為 $3(2x - 8) - \frac{1}{2}(6x + 2) = 6x - 8 - 3x + 1 = 3x - 7$ ，這些學生可能尚未具備一元一次式化簡的能力。 4. 有24%的學生選擇C(低分組有34%)，這些學生可能錯誤使用分配律的運算，化簡過程為 $3(2x - 8) - \frac{1}{2}(6x + 2) = 6x - 24 - 3x + 1 = 3x - 23$ ，這些學生可能尚未具備一元一次式化簡的能力。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	無	A-7-1 代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題。	無

(一) 1. 複習分數的加減乘除運算。

2. 複習乘法對加法的分配律： $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ 。

學生在乘法對減法的分配律上，容易在減法的運算過程出現錯誤，因此建議可以將「減」都先轉換為「加」，之後分配律的運算會更為順利。

$$(1) 2 \times (7-3) = 2 \times [7+(-3)] = 2 \times 7 + 2 \times (-3) = 14 + (-6) = 8$$

$$(2) (-2) \times (8-3) = (-2) \times [8+(-3)] = (-2) \times 8 + (-2) \times (-3) = -16 + 6 = -10$$

(3) x 可以代表任意的數，所以

$$(-3) \times (2-x) = (-3) \times [2+(-x)] = (-3) \times 2 + (-3) \times (-x) = -6 + 3x$$

3. 同類項合併的問題：

$$(1) 5+5=5 \times 2, 7+7=7 \times 2$$

x 可以代表任意的數，所以 $x+x=x \times 2=2x$ 。

$$2x+3x=(x+x)+(x+x+x)=x \times 5=5x;$$

$$5x-3x=(x+x+x+x+x)-(x+x+x)=x+x=x \times 2=2x。$$

(2) 可將 x 視為一個單位進行運算，

5個 x 加上3個 x 等於8個 x ，所以 $5x+3x=8x$ ；

5個 x 拿走3個 x 等於2個 x ，所以 $5x-3x=2x$ 。

(3) x 和1是不同單位，可以仿照複名數方式記錄「幾個 x 和幾個一合起來」。

「5公尺和3公分合起來」我們記成「5公尺3公分」；

同樣地，因為 x 和1是不同單位，所以「5個 x 和3合起來」我們記成「 $5x+3$ 」。

(4) 同單位合併記錄

例如：計算「5公尺3公分+6公尺4公分」時，因為「公尺」和「公分」是不同單位，我們會將「公尺」和「公分」分開計數，因為 $5+6=11$ 和 $3+4=7$ ，得「5公尺3公分+6公尺4公分=11公尺7公分」。因此，計算

「 $(5x+3)+(6x+4)$ 」時，因為「 x 」和「1」是不同單位，我們會將「 x 」和「1」分開計數，因為 $5+6=11$ 和 $3+4=7$ ，得「 $(5x+3)+(6x+4)=11x+7$ 」。

(二) 以本題為例，進行解題說明。

$$3(2x-8) - \frac{1}{2}(6x+2)$$

$$= 3 \times [2x + (-8)] + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (6x + 2)$$

$$= 3 \times (2x) + 3 \times (-8) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (6x) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2$$

$$= 6x + (-24) + (-3x) + (-1)$$

$$= 6x + (-3x) + (-24) + (-1)$$

$$= 3x + (-25)$$

$$= 3x - 25$$

題號	14		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-7-7 指數律：以數字例表示「同底數的乘法指數律」($a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 、 $(a^m)^n = a^{mn}$ 、 $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ ，其中 m, n 為非負整數)；以數字例表示「同底數的除法指數律」($a^m / a^n = a^{m-n}$ ，其中 $m \geq n$ 且 m, n 為非負整數)。		
試題內容	<p>14. 已知 $(16 \times 27)^a = (2^b \times 3^c)^a = 2^d \times 3^6$，其中 a、b、c、d 為正整數，下列選項何者正確？</p> <p>(A) $a = 3$ (B) $b = 5$ (C) $c = 4$ (D) $d = 8$</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.31	0.27	0.27
2	0.17	0.28	0.04
3	0.16	0.26	0.05
4*	0.35	0.18	0.63
未作答	0.01		
通過率	0.35	鑑別度	0.45
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.45，正確答案為選項D，通過率為35%，顯示三成五的學生已具備利用指數律解題的能力。</p> <p>2. 有31%的學生選擇A(低分組有27%)，這些學生誤算$27^a = (3^3)^a = 3^{(3+a)} = 3^6$，尚未具備利用指數律解題的能力。</p> <p>3. 有17%的學生選擇B(低分組有28%)，這些學生誤將16記為2^5，尚未具備利用指數律解題的能力。</p> <p>4. 有16%的學生選擇C(低分組有26%)，這些學生誤將27記為3^4，尚未具備利用指數律解題的能力。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-6-1 20以內的質數和質因數分解:小於20的質數與合數。2、3、5的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。 備註:被分解數的因數,在扣除2、3、5或其次方的部分後、只剩一因數,且此數除了49、77或91之外,只能是11、13、17或19。	N-7-7 指數律:以數字例表示「同底數的乘法指數律」($a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 、 $(a^m)^n = a^{mn}$ 、 $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$,其中 m, n 為非負整數);以數字例表示「同底數的除法指數律」($a^m / a^n = a^{m-n}$,其中 $m \geq n$ 且 m, n 為非負整數)。	N-8-6 等比數列:等比數列;給定首項、公比計算等比數列的一般項。 備註:不處理「已知等比數列不相鄰某兩項的值(不含首項),反求首項、項數或公比」,例如:給定 a_5 和 a_9 的值,求首項和公比。
補救教學建議			
<p>(一) 先復習指數的定義，</p> <p>$7+7+7+7+7+7$，6個7相加可以記成7×6， $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$，6個7相乘可以記成$7^6$， $a+a+a+a+a$，5個a相加可以記成$a \times 5$， $a \times a \times a \times a \times a$，5個a相乘可以記成$a^5$。</p> <p>(二) 先舉一些同底指數相乘的例子，以$3^2 \times 3^5$與$(3^2)^5$為例，幫學生察覺：</p> <p>1. $3^2 \times 3^5 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{2+5} = 3^7$ 2. $(3^2)^5 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) = 3^{2 \times 5}$ 3. $(3^2 \times 7^3)^5 = (3^2 \times 7^3 \times (3^2 \times 7^3) \times (3^2 \times 7^3) \times (3^2 \times 7^3) \times (3^2 \times 7^3))$ $= (3^2)^5 \times (7^3)^5$ $= (3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2) \times (7^3 \times 7^3 \times 7^3 \times 7^3 \times 7^3)$ $= ((3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3))$ $\times ((7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7 \times 7))$ $= 3^{2 \times 5} \times 7^{3 \times 5}$</p> <p>(三) 再舉一些同底指數相除的例子，以$7^6 \div 7^2$為例，幫助學生察覺：</p> $7^6 \div 7^2 = (7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7) \div (7 \times 7) = \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{7 \times 7} = 7^{6-2} = 7^4$ <p>(四) 回到本題，因此</p> $(16 \times 27)^a$ $= (2^4 \times 3^3)^a = (2^b \times 3^c)^a$ $= (2^4)^a \times (3^3)^a = 2^{4 \times a} \times 3^{3 \times a} = 2^d \times 3^6$ <p>可知 $3 \times a = 6 \rightarrow a = 2$、$b = 4$、$c = 3$、$d = 4 \times a = 4 \times 2 = 8$</p>			

題號	15		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	概念理解
學習內容	A-7-1 代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題。		
試題內容	<p>15. 好食多披薩店提供外帶披薩買一送一活動，而且加購寶特瓶汽水一瓶只要 35 元。如果每種披薩一個只要 x 元，許老師從好食多帶了 8 個披薩及 4 瓶汽水，請問許老師花了多少元？</p> <p>(A) $x + 140$ (B) $4x + 70$ (C) $4x + 140$ (D) $8x + 140$</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.04	0.12	0.00
2	0.06	0.14	0.01
3*	0.57	0.27	0.85
4	0.32	0.46	0.14
未作答	0.00		
通過率	0.57	鑑別度	0.59
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.59，正確答案為選項C，通過率為57%，顯示五成七的學生已具備一元一次方程式列式的能力。</p> <p>2. 有4%的學生選擇A(低分組有12%)，這些學生可能誤解題意，以為披薩的錢只要 x 元，加上汽水140元(35元$\times 4$瓶)，合計 $(x+140)$ 元。</p> <p>3. 有6%的學生選擇B(低分組有14%)，這些學生可能誤解題意，以為披薩與汽水都可以買1送1，得到披薩只要付4塊，汽水只要付2瓶的錢，故得到 $(4x+70)$ 元。</p> <p>4. 有 32%的學生選擇 D(低分組有 46%)，這些學生可能未考慮披薩可以買 1 送 1，只考慮披薩與汽水以原價計算，故得 $(8x+140)$ 元。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-7-4 數的運算規律：交換律；結合律；分配律； $-(a+b)=-a-b$ ； $-(a-b)=-a+b$	A-7-1 代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題。	A-7-2 一元一次方程式的意義；一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。

補救教學建議

(一) 說明未知數的意義：

x 雖然是一個未知數，一個目前不知道等於多少的數，但是，只要它是一個數，它就能與其它的數一起做運算，而且順從運算所有的性質。

(二) 3 個 10 元硬幣是 10×3 元，7 個十元硬幣是 10×7 元， x 可以是任意的數，

所以 x 個 10 元硬幣是 $10 \times x$ 元， $10 \times x$ 元可以記成 $10x$ 元。

(三) 50 元和 30 元合起來可以記成 $50 + 30$ (元)，所以 $10x$ 元和 30 元合起來可以記成 $10x + 30$ (元)。

題號	16		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	A-7-5 二元一次聯立方程式的解法與應用：代入消去法；加減消去法；應用問題。		
試題內容	<p>16. 阿強麵包店會在晚上八點後進行折扣，招牌麵包原價是一個 75 元，八點後的特價是一個 35 元。晚上十點結算時，今日的 100 個招牌麵包全部售完，而且該項共賣得 6100 元。請問八點後售出的招牌麵包是多少個？</p> <p>(A)35 (B)50 (C)61 (D)75</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.58	0.24	0.92
2	0.16	0.30	0.03
3	0.16	0.28	0.03
4	0.09	0.17	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.58	鑑別度	0.69
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.69，正確答案為選項A，通過率為58%，顯示近六成的學生已具備將應用問題轉化成二元一次聯立方程式並求出其解的能力。</p> <p>2. 有16%的學生選擇B(低分組有30%)，這些學生可能直接將100個麵包平分成八點前賣50個，八點後賣50個，這些學生可能尚未具備將應用問題轉化成二元一次聯立方程式並求出其解的能力。</p> <p>3. 有16%的學生選擇C(低分組有28%)，這些學生可能直接將最後兩個數據相除得$6100 \div 100 = 61$，這些學生可能尚未具備將應用問題轉化成二元一次聯立方程式並求出其解的能力。</p> <p>4. 有9%的學生選擇D(低分組有17%)，這些學生可能僅是猜測答案，尚未具備將應用問題轉化成二元一次聯立方程式並求出其解的能力。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。	A-7-5 二元一次聯立方程式的解法與應用：代入消去法；加減消去法；應用問題。	無

補救教學建議

- (一) 1. 複習二元一次方程式的應用問題之列式。
 2. 複習二元一次聯立方程式的應用問題之列式。
 3. 複習二元一次方程式的解的意義。
 4. 複習二元一次聯立方程式的解的意義。
 5. 複習二元一次聯立方程式解題的代入消去法，加減消去法。

(二) 以本題為例，進行解題說明。

1. 將應用問題轉化成二元一次聯立方程式：

原價的麵包一個75元，八點後的特價是一個35元，

可假設75元的麵包賣出 x 個，35元的麵包賣出 y 個，

則可列出麵包數量的關係式： $x+y=100$ ，

再根據賣得的價錢，可列出金額的關係式： $75x+35y=6100$ 。

2. 學生可利用二元一次方程式的解的意義，將 $x+y=100$ 的解列表：

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
y	90	80	70	60	50	40	30	20	10

利用二元一次聯立方程式的解的意義，將上表代入 $75x+35y$ ，並和 6100 比較，得下表：

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
y	90	80	70	60	50	40	30	20	10
$75x+35y$	3900	4300	4700	5100	5500	5900	6300	6700	7100

發現當 $(x, y) = (60, 40)$ 時，列出金額不足 6100；當 $(x, y) = (70, 30)$ 時，列出金額超過 6100，所以 x 的解為 60 幾。進而再簡單代幾個 (x, y) 值便可發現解為 $(x, y) = (65, 35)$ 。

3. 利用加減消去法解二元一次聯立方程式

要快速找 (x, y) 的解可以利用加減消去法，將以上得到的兩個關係式合併成為

二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} x + y = 100 \dots\dots\dots ① \\ 75x + 35y = 6100 \dots ② \end{cases}$$

接著再利用加減消去法進行解題

第①式 $\times 75$

$$\begin{cases} 75x + 75y = 7500 \dots ③ \\ 75x + 35y = 6100 \dots ② \end{cases}$$

第③式-第②式 $40y=1400$ ，得 $y=35$

題號	17		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	概念理解
學習內容	A-7-4 二元一次聯立方程式的意義：二元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次方程式；二元一次聯立方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次聯立方程式。		
試題內容	<p>17. 「老師買了若干個披薩請班上的學生吃，有夏威夷和龍蝦兩種口味。老師將龍蝦披薩每個都切成 8 片，夏威夷披薩每個都切成 10 片，發現每位學生都剛好吃到 3 片披薩。」</p> <p>假設老師買了 x 個龍蝦披薩和 y 個夏威夷披薩，下列哪個式子代表學生的總人數？</p> <p>(A) $(\frac{x}{8} + \frac{y}{10}) \div 3$</p> <p>(B) $(8x + 10y) \div 3$</p> <p>(C) $(\frac{x}{8} + \frac{y}{10}) \times 3$</p> <p>(D) $(8x + 10y) \times 3$</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.27	0.29	0.22
2*	0.44	0.27	0.67
3	0.19	0.26	0.09
4	0.09	0.18	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.44	鑑別度	0.40
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為 0.40，正確答案為選項 B，通過率為 44%，顯示超過四成的學生已具備在具體情境中列出二元一次式的能力。</p> <p>2. 有 27% 的學生選擇 A (低分組有 29%)，這些學生誤以為 x 和 y 表示兩種類披薩總片數，但對從每人分的片數回推學生人數的概念正確，尚未具備在具體情境中列出二元一次式的能力。</p> <p>3. 有 19% 的學生選擇 C (低分組有 25%)，這些學生誤以為 x 和 y 表示兩種類披薩總片數，對從每人分的片數回推學生人數的概念也有誤，尚未具備在具體情境中列出二元一次式的能力。</p> <p>4. 有 9% 的學生選擇 D (低分組有 18%)，這些學生能正確以 x 和 y 表示兩種類披薩總片數，但對從每人分的片數回推學生人數的概念也有誤，尚未具備在具體情境中列出二元一次式的能力。</p>			

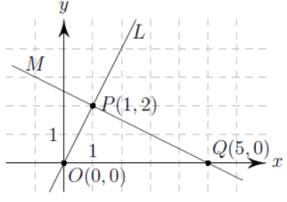
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	無	A-7-4 二元一次聯立方程式的意義；二元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次方程式；二元一次聯立方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次聯立方程式。	無
補救教學建議			
<p>(一) 分析題意找出已知條件、未知條件，再從不同單位的已知與未知條件中找關係作單位轉換。</p> <p>(二) 以此題為例</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 已知：龍蝦披薩每個切成 8 片、夏威夷披薩每個切成 10 片、每位學生分到 3 片。 2. 未知：龍蝦披薩個數(x 個)、夏威夷披薩個數(y 個)、學生總人數。 3. 找關係作單位轉換：披薩片數轉換成學生總人數 <ol style="list-style-type: none"> (1) 從已知每位學生分到 3 片，亦即每 3 片分給一個人， 所以：學生總人數=披薩總片數\div3，因此要先算出披薩總片數。 (2) 披薩總片數=龍蝦披薩總片數+夏威夷披薩總片數 從已知每個龍蝦披薩切成 8 片，可知 x 個龍蝦披薩總共切成 $8x$ 片 從已知每個夏威夷披薩切成 10 片，可知 y 個夏威夷披薩總共切成 $10y$ 片 披薩總片數=$8x+10y$。 (3) 從(1)、(2)可知，學生總人數=$(8x+10y)\div 3$。 			

題號	18		
內容領域	數與量	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-7-2 質因數分解的標準分解式：質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。		
試題內容	<p>18. 設 $a = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 11$、$b = 2^5 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2 \times 11$，已知 k 為 a 的倍數，且 k 為 b 的因數，下列選項何者可能為 k 的標準分解式？</p> <p>(A) $2^2 \times 3 \times 5^2 \times 11^2$ (B) $2^2 \times 3^2 \times 5^3 \times 7 \times 11$ (C) $2^4 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2$ (D) $2^7 \times 3^3 \times 5^5 \times 7^2 \times 11^2$</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.21	0.24	0.16
2*	0.39	0.24	0.64
3	0.16	0.23	0.08
4	0.24	0.28	0.13
未作答	0.00		
通過率	0.39	鑑別度	0.40
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.40，正確答案為選項B，通過率為39%，顯示近四成的學生已具備利用標準分解式判斷因數或倍數的能力。</p> <p>2. 有21%的學生選擇A(低分組有24%)，這些學生可能誤解題意以為k是a和b的最大公因數。</p> <p>3. 有16%的學生選擇C(低分組有23%)，這些學生可能考慮$a = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 11$的倍數時忽略了有質因數11。</p> <p>4. 有24%的學生選擇D(低分組有28%)，這些學生可能誤解題意，錯誤算式如下：</p> $k = a \times b = (2^2 \times 3 \times 5^2 \times 11) \times (2^5 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2 \times 11) = 2^7 \times 3^3 \times 5^5 \times 7^2 \times 11^2。$			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-6-1 20 以內的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。 備註：被分解數的因數，在扣除 2、3、5 或其次方的部分後、只剩一因數，且此數除了 49、77 或 91 之外，只能是 11、13、17 或 19。	N-7-2 質因數分解的標準分解式：質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。	無
補救教學建議			
<p>(一) 底下以「判別 2×3^3 是否為 $2^2 \times 3^2$ 的倍數？」說明如何幫助學生解題。</p> <p>因為 $(2 \times 3^3) \div (2^2 \times 3^2) = \frac{2 \times 3^3}{2^2 \times 3^2} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3}{2 \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3}} = \frac{3}{2}$ (不是整數)， 所以 2×3^3 不是 $2^2 \times 3^2$ 的倍數。</p> <p>(二) 底下以「判別 2×3^2 是否為 $2 \times 3^3 \times 5$ 的因數」說明如何幫助學生解題。</p> <p>方法一：用指數律來判斷，因為 $2 \times 3^3 \times 5 = (2 \times 3^2) \times 3 \times 5$， 所以 2×3^2 是 $2 \times 3^3 \times 5$ 的因數。</p> <p>方法二：先改寫成質因數連乘積再判斷 因為 $2 \times 3^3 \times 5 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$，$2 \times 3^2 = 2 \times 3 \times 3$ 因為 $2 \times 3^3 \times 5 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = (2 \times 3 \times 3) \times 3 \times 5 = (2 \times 3^2) \times 3 \times 5$， 所以 2×3^2 是 $2 \times 3^3 \times 5$ 的因數。</p> <p>(三) 幫助學生形成利用標準分解式判斷因數及倍數的準則。</p> <p>將 a、b 兩數寫成標準分解式時，</p> <ol style="list-style-type: none"> 當 a 為 b 的倍數，則 b 的質因數都是 a 的質因數，且 b 的每個質因數的次方小於或等於 a 相同質因數的次方。例如：$2 \times 3^3 \times 5$ 是 2×3^2 的倍數。 當 a 為 b 的因數，則 a 的質因數都是 b 的質因數，且 a 的每個質因數的次方小於或等於 b 相同質因數的次方。例如：2×3^2 是 $2 \times 3^3 \times 5$ 的因數。 			

題號	19		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	A-7-1 代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題。		
試題內容	<p>19. 全民運動會開幕典禮的大會舞，主辦單位邀請甲、乙兩校的同學參加，已知甲校有 300 人參加，乙校有 250 人參加，且兩校參加的全部同學中，男生比女生多 150 人。已知甲校男生比乙校女生多 100 人，則甲校女生比乙校男生多或少多少人？</p> <p>(A)少 50 人 (B)少 100 人 (C)多 50 人 (D)多 100 人</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.46	0.25	0.72
2	0.17	0.26	0.08
3	0.26	0.33	0.16
4	0.10	0.15	0.04
未作答	0.01		
通過率	0.46	鑑別度	0.47
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.47，正確答案為選項A，通過率為46%，顯示近五成的學生已具備以代數符號記錄情境問題及一次式化簡的能力。</p> <p>2. 有17%的學生選擇B (低分組有26%)，這些學生可能以題目中「甲校男生比乙校女生多100人」，直接判斷甲校女生比乙校男生少100人，這些學生可能尚未具備以代數符號記錄情境問題及一次式化簡的能力。</p> <p>3. 有26%的學生選擇C (低分組有33%)，這些學生可能直接算成甲校人數減乙校人數=300-250=50，這些學生可能尚未具備以代數符號記錄情境問題及一次式化簡的能力。</p> <p>4. 有 10%的學生選擇 D (低分組有 15%)，這些學生可能僅是猜測答案，尚未具備以代數符號記錄情境問題及一次式化簡的能力。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	無	A-7-1 代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題	A-8-1 二次式的乘法公式： $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ； $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ； $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ； $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ 。 A-8-2 多項式的意義：一元多項式的定義與相關名詞（多項式、項數、係數、常數項、一次項、二次項、最高次項、升冪、降冪）。
補救教學建議			
<p>(一) 複習一次式的化簡。</p> <p>(二) 以本題為例，進行解題說明。</p> <p>根據題意中「甲校男生比乙校女生多 100 人」，可進行假設。</p> <p>假設乙校女生是 x 人，甲校男生 $100+x$ 人，</p> <p>再根據題意中「甲校有 300 人參加，乙校有 250 人參加」，</p> <p>則乙校男生會是 $250-x$ 人，甲校女生會是 $300-(100+x)=200-x$ 人。</p> <p>題目問甲校女生比乙校男生，</p> <p>即甲校女生-乙校男生</p> $=(200-x)-(250-x)$ $=200-x-250+x$ $=-50$			

題號	20		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義： $ax+by=c$ 的圖形； $y=c$ 的圖形（水平線）； $x=c$ 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。		
試題內容	<p>20. 如圖，坐標平面上有兩條直線 L 及直線 M。</p>  <p>下列何者為直線 L 及直線 M 的二元一次聯立方程式？</p> <p>(A) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$</p> <p>(B) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$</p> <p>(C) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$</p> <p>(D) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.24	0.24	0.20
2*	0.44	0.26	0.68
3	0.15	0.24	0.04
4	0.17	0.25	0.08
未作答	0.00		
通過率	0.44	鑑別度	0.42
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.42，正確答案為選項B，通過率為44%，顯示超過四成的學生已掌握二元一次方程式的幾何意義。</p> <p>2. 24%學生選擇A（低分組有24%），15%學生選擇C（低分組有24%），17%學生選擇D（低分組有25%），這些學生尚未掌握二元一次方程式的幾何意義。</p>			

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	無	A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義： $ax+by=c$ 的圖形； $y=c$ 的圖形（水平線）； $x=c$ 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。	F-8-2 一次函數的圖形；常數函數的圖形；一次函數的圖形。

補救教學建議

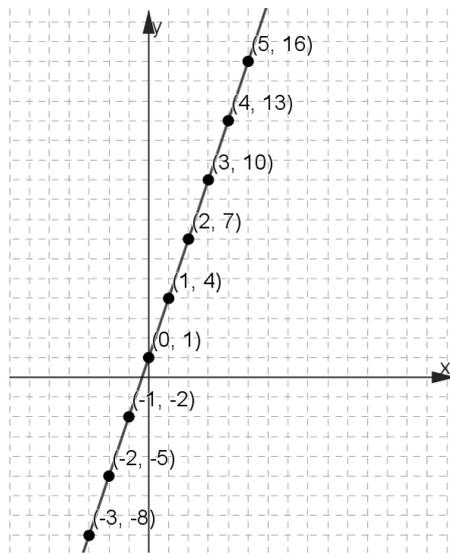
(一) 利用描點繪圖來說明二元一次方程式的圖形為一直線，而直線上的每一個點都是方程式的一組解。

1. 二元一次方程式 $y=ax+b$ 的圖形為一直線，以 $y=3x+1$ 為例：

(1) $y=3x+1$ 通過下列各點

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16

(2) $y=3x+1$ 在座標平面上的圖形如下



2. 二元一次方程式 $y=b$ 的圖形為一直線，以 $y=3$ 為例：

(1) $y=3$ 通過下列各點

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	3	3	3	3	3	3	3	3	3

(2) $y=3$ 在座標平面上的圖形如下

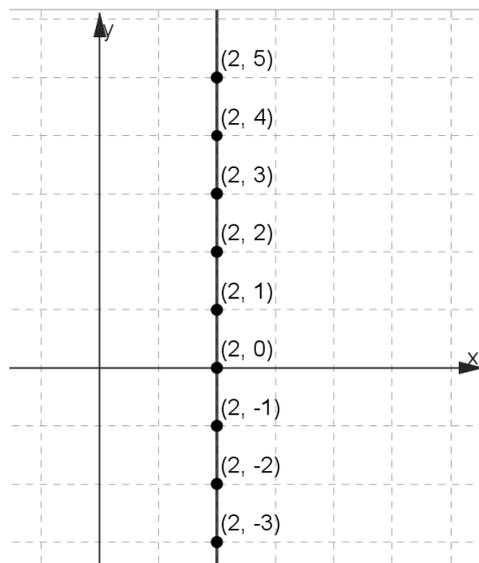


3. 二元一次方程式 $x=k$ 的圖形為一直線，以 $x=2$ 為例：

(1) $x=2$ 通過下列各點

x	2	2	2	2	2	2	2	2	2
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

(2) $x=2$ 在座標平面上的圖形如下



(二) 利用二元一次方程式的圖形為一直線，而直線上的每一個點都是方程式的一組解來說明二元一次聯立方程式是兩條直線，兩條直線的交點就是共同解。

(三) 以本題來說

1. 直線 L 通過(1,2)和(0,0)，因此帶入二元一次必能使等式成立。
2. 直線 M 通過(1,2)和(5,0)，因此帶入二元一次必能使等式成立。

選項 A :
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$2x - y = 0$$

$$(1, 2) \quad 2 \times 1 - 2 = 0 \rightarrow \text{成立}$$

$$(0, 0) \quad 2 \times 0 - 0 = 0 \rightarrow \text{成立}$$

$$2x + y = 4$$

$$(1, 2) \quad 2 \times 1 + 2 = 4 \rightarrow \text{成立}$$

$$(5, 0) \quad 2 \times 5 + 0 = 10 \rightarrow \text{不成立}$$

所以不是直線 L 和直線 M 的二元一次聯立方程式

$$\text{選項 B : } \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$2x - y = 0$$

$$(1, 2) \quad 2 \times 1 - 2 = 0 \rightarrow \text{成立}$$

$$(0, 0) \quad 2 \times 0 - 0 = 0 \rightarrow \text{成立}$$

$$x + 2y = 5$$

$$(1, 2) \quad 1 + 2 \times 2 = 5 \rightarrow \text{成立}$$

$$(5, 0) \quad 5 + 2 \times 0 = 5 \rightarrow \text{成立}$$

所以是直線 L 和直線 M 的二元一次聯立方程式

$$\text{選項 C : } \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$x - 2y = 0$$

$$(1, 2) \quad 1 - 2 \times 2 = -3 \rightarrow \text{不成立}$$

$$(0, 0) \quad 0 - 2 \times 0 = 0 \rightarrow \text{成立}$$

$$2x + y = 4$$

$$(1, 2) \quad 2 \times 1 + 2 = 4 \rightarrow \text{成立}$$

$$(5, 0) \quad 2 \times 5 + 0 = 10 \rightarrow \text{不成立}$$

所以不是直線 L 和直線 M 的二元一次聯立方程式

$$\text{選項 D : } \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$2x - y = 0$$

$$(1, 2) \quad 1 - 2 \times 2 = -3 \rightarrow \text{不成立}$$

$$(0, 0) \quad 0 - 2 \times 0 = 0 \rightarrow \text{成立}$$

$$x + 2y = 5$$

$$(1, 2) \quad 1 + 2 \times 2 = 5 \rightarrow \text{成立}$$

$$(5, 0) \quad 5 + 2 \times 0 = 5 \rightarrow \text{成立}$$

所以不是直線 L 和直線 M 的二元一次聯立方程式

題號	21		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-7-8 科學記號：以科學記號表達正數，此數可以是很大的數（次方為正整數），也可以是很小的數（次方為負整數）。 備註：本條目旨在科學記號的了解與使用，例如 1 奈米等於 10^{-9} 公尺，其中含有負數次方的部分，可以使用小數與之轉換來解釋，不宜牽涉到其他底數的負次方，也不宜涉及科學記號的四則運算。		
試題內容	21. 根據統計，臺灣在 2018 年的廚餘回收量達 59 萬公噸，為亞洲浪費食物之冠，59 萬公噸相當於多少公斤？(1公噸 = 1000公斤) (A) 5.9×10^4 (B) 5.9×10^5 (C) 5.9×10^7 (D) 5.9×10^8		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.29	0.35	0.17
2	0.20	0.32	0.08
3	0.16	0.20	0.12
4*	0.34	0.12	0.62
未作答	0.00		
通過率	0.34	鑑別度	0.50
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.50，正確答案為選項 D，通過率為 34%，顯示超過三成的學生已具備利用科學記號表達正數的能力。 2. 有 29% 的學生選擇 A (低分組有 35%)，這些學生可能誤以為重量為 59 公噸，相當於 $59 \times 1000 = 59000 = 5.9 \times 10^4$ 公斤。 3. 有 20% 的學生選擇 B (低分組有 32%)，這些學生可能得到重量為 59 萬公斤，相當於 $590000 = 5.9 \times 10^5$ 公斤。 4. 有 16% 的學生選擇 C (低分組有 20%)，這些學生可能計算得到 $59 \times 10000 \times 1000$ 公斤，相當於 590000000 公斤，但學生計算 0 的個數有 7 個，故得到 5.9×10^7 公斤。			

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-7-6 指數的意義：指數為非負整數的次方；$a \neq 0$ 時 $a^0=1$；同底數的大小比較；指數的運算。</p> <p>N-7-7 指數律：以數字例表示「同底數的乘法指數律」 ($a^m \times a^n = a^{m+n}$、$(a^m)^n = a^{mn}$、$(a \times b)^n = a^n \times b^n$，其中 m, n 為非負整數)；以數字例表示「同底數的除法指數律」 ($a^m \div a^n = a^{m-n}$，其中 $m \geq n$ 且 m, n 為非負整數)。</p>	<p>N-7-8 科學記號：以科學記號表達正數，此數可以是很大的數（次方為正整數），也可以是很小的數（次方為負整數）。</p> <p>備註：本條目旨在科學記號的了解與使用，例如 1 奈米等於 10^{-9} 公尺，其中含有負數次方的部分，可以使用小數與之轉換來解釋，不宜牽涉到其他底數的負次方，也不宜涉及科學記號的四則運算。</p>	無

補救教學建議

(一) 先幫助學生建立位值表

位名	千	百	十	個	十分	百分	千分
位值	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
10 的次方	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
指數	3	2	1	0	-1	-2	-3

(二) 利用位值表幫助學生學習科學記號表示法

將 230000 寫成科學記號，先把數字填入下面表格

10 的次方	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
	2	3	0	0	0	0.

讓學生知道 230000 最高位的 2 表示 2 個 10^5 ，

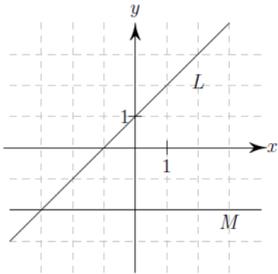
所以 230000 可以用科學記號表示成 2.3×10^5

(三) 將科學記號轉換成整數或小數

將 2.3×10^4 寫成小數，我們知道最高位的 2 表示 2 個 10^4 ，將數字填入下表

10 的次方	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
	2	3	0	0	0.

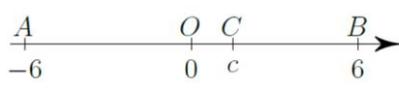
得到 $2.3 \times 10^4 = 23000$

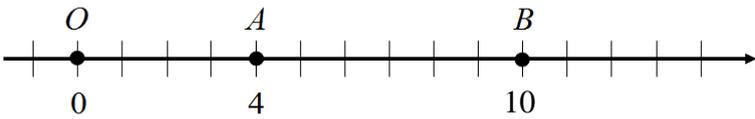
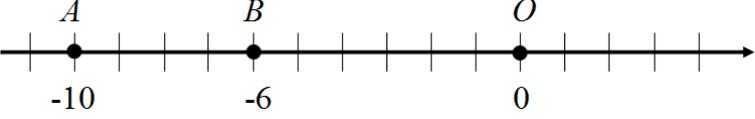
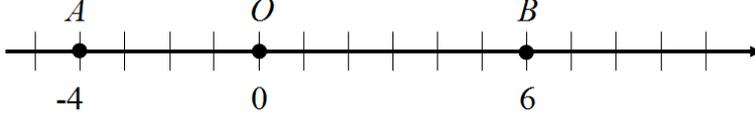
題號	22		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義： $ax+by=c$ 的圖形； $y=c$ 的圖形（水平線）； $x=c$ 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。		
試題內容	<p>22. 下圖是直線 $L: x - y = a$ 和直線 $M: y = b$ 的圖形，其中 a、b 皆為整數。</p>  <p>求 $a + b = ?$</p> <p>(A) -5 (B) -3 (C) -1 (D) 1</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.20	0.03
2*	0.46	0.24	0.72
3	0.23	0.32	0.12
4	0.19	0.23	0.12
未作答	0.00		
通過率	0.46	鑑別度	0.48
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.48，正確答案為選項B，通過率為46%，顯示四成六的學生已掌握二元一次聯立方程式的幾何意義。</p> <p>2. 有12%的學生選擇A（低分組有20%），這些學生可能正確判斷兩直線交點坐標為(-3,-2)，誤將a判斷為-3、b=-2，得$a+b=-3+(-2)=-5$，這些學生可能部分掌握二元一次聯立方程式的幾何意義。</p> <p>3. 有23%的學生選擇C（低分組有32%），這些學生可能誤將x軸看成是直線M，進而判斷兩直線交點坐標為(-1,0)，算出$a=-1-0=-1$，$b=0$，$a+b=-1+0=-1$，這些學生可能部分掌握二元一次聯立方程式的幾何意義。</p> <p>4. 有19%的學生選擇D（低分組有23%），這些學生可能僅是猜測答案，尚未掌握二元一次聯立方程式的幾何意義。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	無	A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義： $ax+by=c$ 的圖形； $y=c$ 的圖形（水平線）； $x=c$ 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。	無
補救教學建議			
<p>(一) 複習二元一次聯立方程式的幾何意義。</p> <p>(二) 以本題為例，進行解題說明。</p> <p>直角坐標平面上兩直線交點坐標為(-3,-2)</p> <p>表示直線 L 通過(-3,-2)，也就是可以將 $x=-3$、$y=-2$ 代入直線 L 方程式得 $-3-(-2)=a$，$a=-1$</p> <p>表示直線 M 通過(-3,-2)，也就是可以將 $x=-3$、$y=-2$ 代入直線 M 方程式得 $-2=b$</p> <p>因此 $a+b=-1+(-2)=-3$</p>			

題號	23		
內容領域	數與量	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-7-9 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。 備註：不涉及使用繁分數，遇到兩分數之比時，以分數相除處理之。		
試題內容	<p>23. 小僊在網路上查到手工布丁的食譜如下：</p> <div style="border: 1px solid green; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>手工布丁 5 杯份量 鮮奶 280mL、雞蛋 2 顆、鮮奶油 30mL、砂糖 30g(布丁液用) 黑糖 5 小匙(放在布丁底部用)</p> </div> <p>她檢查了一下家裡的庫存發現，鮮奶剩下 784 mL，鮮奶油剩下 78 mL，其他材料都足夠使用，請問他最多可以做多少杯布丁？</p> <p>(A)2 (B)3 (C)13 (D)14</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.36	0.38	0.24
2	0.09	0.20	0.01
3*	0.47	0.28	0.72
4	0.09	0.14	0.03
未作答	0.00		
通過率	0.47	鑑別度	0.44
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.44，正確答案為選項C，通過率為47%，顯示近五成的學生已具備運用比或比例式解應用問題的能力。</p> <p>2. 有36%的學生選擇A(低分組有38%)，這些學生直接把庫存量除以食譜給的分量，算出庫存量是食譜分量的2倍，但未考慮到食譜為5杯的分量，尚未具備運用比或比例式解應用問題的能力。</p> <p>3. 有9%的學生選擇B(低分組有20%)，這些學生直接把庫存量除以食譜給的分量，算出庫存量是食譜分量的2倍，不僅未考慮到食譜為5杯的分量，還把不足的材料也估算入可以做成品的量，尚未具備運用比或比例式解應用問題的能力。</p> <p>4. 有9%的學生選擇D(低分組有14%)，這些有考慮到食譜為5杯的分量，但把不足的材料也估算入可以做成品的量，尚未具備運用比或比例式解應用問題的能力。</p>			

教材地位分析																							
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識																				
學習內容	N-6-6 比與比值：異類量的比與同類量的比之比值的意義。理解相等的比中牽涉到的兩種倍數關係（比例思考的基礎）。解決比的應用問題。 備註：比中各數原則上為整數，但也可包含簡單之小數與分數。	N-7-9 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。 備註：不涉及使用繁分數，遇到兩分數之比時，以分數相除處理之。	S-8-8 三角形的基本性質：等腰三角形兩底角相等；非等腰三角形大角對大邊，大邊對大角；三角形兩邊和大於第三邊；外角等於其內對角和。																				
補救教學建議																							
(一) 複習比例式比值、倍數的概念，請參考第 8 題之教學建議。 (二) 以此題為例																							
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 15%;"></th> <th style="width: 25%;">杯數</th> <th style="width: 25%;">鮮奶(mL)</th> <th style="width: 10%;"></th> <th style="width: 25%;">鮮奶油(mL)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>5 杯</td> <td>280</td> <td>:</td> <td>30</td> </tr> <tr> <td></td> <td>? 杯</td> <td>784</td> <td>:</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>? 杯 =</td> <td></td> <td>:</td> <td>78</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center; margin-top: 20px;"> $\text{鮮奶 } 784\text{mL 最多可以做出 } 5 \times \frac{784}{280} = 14 \text{ 杯。}$ $\text{鮮奶油 } 78\text{mL 最多可以做出 } 5 \times \frac{78}{30} = 13 \text{ 杯。}$ 因最多只能做出 13 杯布丁。 </p>					杯數	鮮奶(mL)		鮮奶油(mL)		5 杯	280	:	30		? 杯	784	:			? 杯 =		:	78
	杯數	鮮奶(mL)		鮮奶油(mL)																			
	5 杯	280	:	30																			
	? 杯	784	:																				
	? 杯 =		:	78																			

題號	24		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
學習內容	N-7-5 數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $ a-b $ 表示數線上兩點 a, b 的距離。 備註：絕對值引入的目的用於記錄數線上兩點的距離，不處理絕對值方程式和絕對值不等式。		
試題內容	24. 如圖，數線上有 A 、 O 、 C 、 B 四點，已知 $P(x)$ 為 A 和 C 的中點。  下列敘述何者正確？ (A) $x = \frac{c-6}{2}$ (B) $x = \frac{c+6}{2}$ (C) $ x-6 = x-c $ (D) $ x+6 = x+c $		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.31	0.20	0.44
2	0.36	0.30	0.38
3	0.19	0.28	0.09
4	0.14	0.21	0.08
未作答	0.00		
通過率	0.31	鑑別度	0.24
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為 0.24，正確答案為選項 A，通過率為 31%，顯示三成的學生已具備利用絕對值解題的能力。 2. 有 36% 的學生選擇 B (低分組有 30%)，這些學生可能誤解中點的意義，以為中點的坐標是計算左右兩端點的坐標之差再除以 2。 3. 有 19% 的學生選擇 C (低分組有 28%)，這些學生可能誤以為 $P(x)$ 為 $C(c)$ 和 $B(6)$ 的中點，故得到 $ x-6 = x-c $ 。 4. 有 14% 的學生選擇 D (低分組有 21%)，這些學生可能不熟悉利用絕對值計算數線上兩點的距離，得到 $\overline{AP} = x - (-6) = x+6 $ ， $\overline{PC} = x+c $ ，故得 $ x+6 = x+c $ 。			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-4-8 數線與分數、小數：連結分小數長度量的經驗。以標記和簡單的比較與計算，建立整數、分數、小數一體的認識。 備註：標記限一位小數（相當於分母等於10）與分母不大於5的分數。以等值分數思維（N-4-6）協助學生認識整數、分數、小數為一體。因初學等值分數，本條目不處理分數和小數的混合計算問題。	N-7-5 數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $ a-b $ 表示數線上兩點 a, b 的距離。 備註：絕對值引入的目的用於記錄數線上兩點的距離，不處理絕對值方程式和絕對值不等式。	無
補救教學建議			
<p>(一) 先複習數線兩點距離如何計算：</p> <p>1. 先考慮一數到原點的距離會等該數的絕對值：例$A(3)$到原點的距離$= 3 =3$，$B(-5)$到原點的距離$= -5 =5$</p> <p>2. 再考慮兩數的距離可以分成三種狀況討論：</p> <p>(1) 兩數同為正數，$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 10 - 4 = 6$</p>  <p>(2) 兩數同為負數，$\overline{AB} = \overline{OA} - \overline{OB} = 10 - 6 = (-6) - (-10) = 4$</p>  <p>(3) 兩數互為相反數，$\overline{AB} = \overline{OB} + \overline{OA} = 6 + 4 = 6 - (-4) = 10$</p>  <p>3. 由2.的(1)(2)(3)可知數線兩點的距離等右邊點的坐標減去左邊點的坐標，也就是較大的坐標減去較小的坐標，若不管那兩點的坐標誰大誰小，也可以用兩點坐標相減的絕對值表示。例如：給定兩點$A(a)$、$B(b)$，則</p> $\overline{AB} = a - b \text{ 或 } b - a 。$			

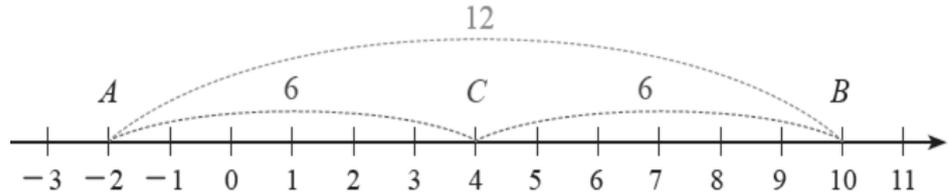
(二) 舉例說明中點坐標如何計算：

例：已知 $A(-2)$ 、 $B(10)$ ，求 A 、 B 兩點的中點(C 點)坐標為何？

$$\overline{AB} = 10 - (-2) = 12, \quad \overline{AC} = \overline{BC} = 12 \div 2 = 6,$$

由 A 點坐標往右 6 個單位長可得 $(-2) + 6 = 4$ ，

即 A 、 B 兩點的中點(C 點)坐標為 4。

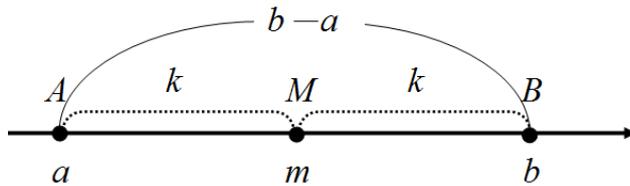


(三) ※中點公式：(需假設變數，建議在講一元一次方程式時再介紹)

設數線上有 $A(a)$ 、 $B(b)$ ，且 B 在 A 的右方， A 、 B 的中點為 $M(m)$ ，

$$\overline{AB} = b - a, \quad \overline{AM} = \overline{MB} = k = \frac{b - a}{2}, \quad m = a + k = a + \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2}, \text{ 得到}$$

$$\text{中點 } M \text{ 的坐標} = \frac{a + b}{2} \quad (\text{亦即 } A、B \text{ 兩點的坐標相加除以 } 2)$$



以上題為例：可知 $A(-2)$ 和 $B(10)$ 的中點坐標為 $\frac{-2+10}{2} = 4$

題號	25		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-7-2 一元一次方程式的意義：一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。		
試題內容	<p>25. 已知 a、b 為整數且 $ax = b$ 的解為 $x = -\frac{2}{3}$， 請問 $by = a$ 的解為 $y = ?$</p> <p>(A) $-\frac{3}{2}$</p> <p>(B) $-\frac{2}{3}$</p> <p>(C) $\frac{2}{3}$</p> <p>(D) $\frac{3}{2}$</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.42	0.19	0.76
2	0.20	0.28	0.10
3	0.19	0.27	0.06
4	0.18	0.25	0.08
未作答	0.01		
通過率	0.42	鑑別度	0.56
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.56，正確答案為選項A，通過率為42%，顯示超過四成的學生已理解一元一次方程式解的意義。</p> <p>2. 有20%的學生選擇B(低分組有28%)，這些學生可能認為$ax=b$與$bx=a$有相同的解，或者在計算時發生錯誤。</p> <p>3. 有19%的學生選擇C(低分組有27%)，這些學生可能認為$ax=b$與$bx=a$的解互為相反數，或者在計算時發生錯誤。</p> <p>4. 有18%的學生選擇D(低分組有25%)，這些學生可能認為$ax=b$的解與$bx=a$的解乘積為-1，或者在計算時發生錯誤。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>R-5-3 以符號表示數學公式：國中代數的前置經驗。初步體驗符號之使用，隱含「符號代表數」、「符號與運算符號的結合」的經驗。應併入其他教學活動。</p> <p>備註：藉由幾何圖形的面積與體積公式較易進行。也可在分數乘法中運用。</p>	<p>A-7-2 一元一次方程式的意義：一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。</p>	<p>F-8-1 一次函數：透過對應關係認識函數（不要出 $f(x)$ 的抽象型式）、常數函數 ($y=c$)、一次函數 ($y=ax+b$)。</p> <p>F-8-2 一次函數的圖形：常數函數的圖形；一次函數的圖形。</p>
補救教學建議			
<p>(一) 透過生活情境，幫助學生理解方程式解的意義。以下例說明： 可樂每瓶 a 元，購買 5 瓶可樂，付了 200 元，找回 50 元。子題①，要求學生依題意列出方程式 $200-5\times a=50$。子題②，提供三個選項(A)20 元、(B)25 元、(C)30 元，要求學生判斷可樂每瓶多少錢。幫助學生認識一元一次方程式解的意義。</p> <p>(二) 透過方程式，幫助學生熟練方程式解的意義。以下例說明： 給定一個一元一次方程式 $3x-7=-1$，及選項(A) $x=1$、(B) $x=-3$、(C) $x=2$，要求學生判斷何者為 $3x-7=-1$ 的解。幫助學生理解一元一次方程式的解即為「以該值代入 x 使得方程式的兩邊相等，該值稱為一元一次方程式的解」。</p>			

肆、八年級試題選項分析與教學建議

題號	1		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-8-1 二次式的乘法公式： $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ； $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ； $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ； $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ 。		
試題內容	<p>1. 計算 $107^2 - 93^2 = ?$</p> <p>(A)9951</p> <p>(B)2800</p> <p>(C)400</p> <p>(D)28</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.11	0.02
2*	0.84	0.65	0.97
3	0.05	0.12	0.00
4	0.05	0.12	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.84	鑑別度	0.32
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為 0.32，正確答案為選項 B，通過率為 84%，顯示超過八成的學生已具備二次式乘法公式計算的能力。</p> <p>2. 有 6%的學生選擇 A(低分組有 11%)，這些學生可能算成 $107 \times 93 = 9951$，這些學生可能尚未具備二次式乘法公式計算的能力。</p> <p>3. 有 5%的學生選擇 C(低分組有 12%)，這些學生可能算成 $(107+93) \times 2 = 400$，這些學生可能尚未具備二次式乘法公式計算的能力。</p> <p>4. 有 5%的學生選擇 D(低分組有 12%)，這些學生可能將 107^2 視為是 107×2，計算成 $107^2 - 93^2 = 107 \times 2 - 93 \times 2 = 28$，這些學生可能尚未具備二次式乘法公式計算的能力。</p>			

教材地位分析				
		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	A-7-1 代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題。	A-8-1 二次式的乘法公式： $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ； $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ； $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ； $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ 。	無	

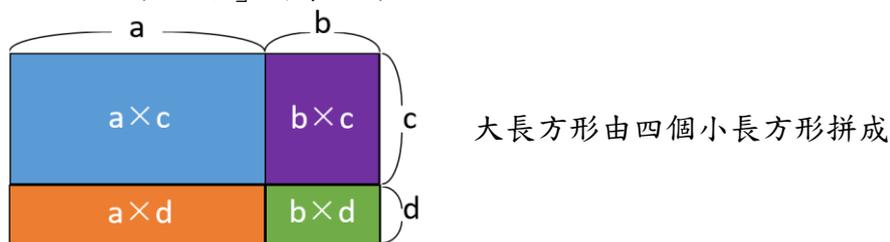
補救教學建議	
<p>(一) 複習乘法公式。和的平方、差的平方、平方差。</p> <p>1. 先複習乘法公式會使用到的分配律</p> <p>以「老師將班上同學分組進行教學，每組有男生 a 人，女生 b 人，共 c 組，全班學生共有多少人？」為例，說明分配律 $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$。</p> <p>方法 1：合起來算</p> <p>先算每組有 a 位男生，b 位女生合起來的人數，再計算 c 組的人數，算式可記成 $(a+b) \times c$。</p> <p>方法 2：分開算</p> <p>先分別算出 c 組男生的人數和女生人數，再合起來計算全班人數，算式可記成 $a \times c + b \times c$。</p> <p>覺察發現：因為都是同一個問題，只是不同的算法，所以結果一定會相等。</p> <p>結論：所以可以記成 $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$。</p> <p>2. 接著複習乘法公式</p> <p>以「老師請客，班上同學每人都拿到一個 a 元的漢堡及一杯 b 元的飲料，已知班上男生有 c 人，女生有 d 人，老師共花多少錢請客？」為例，說明分配律 $(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$。</p> <p>方法 1：合起來算</p> <p>每位學生拿到的食物是 $(a+b)$ 元，男女生共有 $(c+d)$ 人，老師花費的算式可記成 $(a+b) \times (c+d)$</p> <p>方法 2：分開算</p> <p>(1) 每位學生拿到的食物是 $(a+b)$ 元，</p> <p>男生有 c 人，花費的算式可記成 $(a+b) \times c$</p> <p>女生有 d 人，花費的算式可記成 $(a+b) \times d$</p> <p>老師花費的算式可記成 $(a+b) \times c + (a+b) \times d$</p> <p>(2) 漢堡一個 a 元，男生有 c 人，花費的算式可記成 $a \times c$</p> <p>女生有 d 人，花費的算式可記成 $a \times d$</p> <p>飲料一杯 b 元，男生有 c 人，花費的算式可記成 $b \times c$</p> <p>女生有 d 人，花費的算式可記成 $b \times d$</p> <p>老師花費的算式可記成 $a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$</p>	

覺察發現：因為都是同一個問題，只是不同的算法，所以結果一定會相等。

結論：所以可以記成

$$(a+b) \times (c+d) = (a+b) \times c + (a+b) \times d = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

可利用「長方形」圖像進行記憶



大長方形的面積為 $(a+b) \times (c+d)$ ，

四個小長方形分別為 $a \times c$ 、 $a \times d$ 、 $b \times c$ 、 $b \times d$

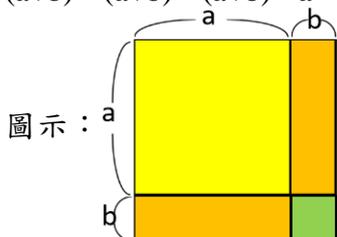
由「大長方形是由四個小長方形拼成」，

可得 $(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$ 。

3. 再複習和的平方、差的平方、平方差公式

(1) 和的平方公式。

$$(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + 2ab + b^2$$



大正方形面積=兩個小正方形面積+兩個長方形面積

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(2) 差的平方公式。 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

將 $(a-b)$ 改寫成 $[a+(-b)]$ 再利用和的平方公式（此處不利用圖式，圖式難度較高）

$$(a-b)^2 = [a+(-b)]^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

(3) 平方差公式。 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ （此處不利用圖式，圖式難度較高）

將 $(a-b)$ 改寫成 $[a+(-b)]$ 再利用乘法公式

$$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= (a+b)[a+(-b)] = a \times a + a \times (-b) + b \times a + b \times (-b) \\ &= a^2 + (-ab) + ab + (-b^2) = a^2 - b^2 \end{aligned}$$

(二) 以本題為例，進行解題說明。

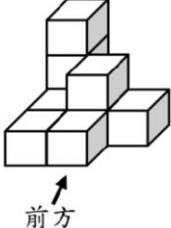
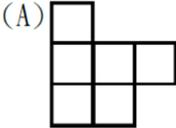
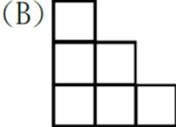
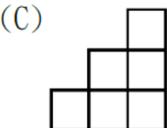
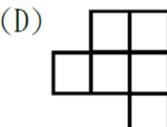
$107^2 - 93^2$ 符合平方差公式，也就是 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ，其中 $a=107$ ， $b=93$

所以 $107^2 - 93^2$

$$= (107+93)(107-93)$$

$$= 200 \times 14$$

$$= 2800$$

題號	2		
內容領域	空間形狀與坐標幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	S-7-2 三視圖：立體圖形的前視圖、上視圖、左（右）視圖。立體圖形限制內嵌於 $3 \times 3 \times 3$ 的正方體且不得中空。		
試題內容	<p>2. 下圖為 9 個正方體積木組成的立體形體。</p>  <p>下列哪個選項為此形體的上視圖？</p> <p>(A)  (B) </p> <p>(C)  (D) </p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.86	0.72	0.96
2	0.10	0.18	0.04
3	0.02	0.06	0.00
4	0.02	0.04	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.86	鑑別度	0.24
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為 0.24，正確答案為選項 A，通過率為 85%，顯示八成五的學生已掌握三視圖的概念。</p> <p>2. 有 10%的學生選擇 B (低分組有 18%)，有 2%的學生選擇 C (低分組有 6%)，有 2%的學生選擇 D (低分組有 4%)，這些學生尚未掌握三視圖的概念。</p>			

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>S-6-4 柱體體積與表面積：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積×高」的公式。簡單複合形體體積。</p> <p>備註：柱體體積不用說明所有情況，即可告知體積公式為底面積×高。柱體限三角柱、四角柱、圓柱。複合形體之體積以兩形體組合為限。柱體表面積只處理底面為圓、長方形、直角三角形、平行四邊形的情況，且應注意底面邊長的正確性。表面積不宜過度評量。表面積不處理複合形體。</p>	<p>S-7-2 三視圖：立體圖形的前視圖、上視圖、左（右）視圖。立體圖形限制內嵌於 3×3×3 的正方體且不得中空。</p>	無

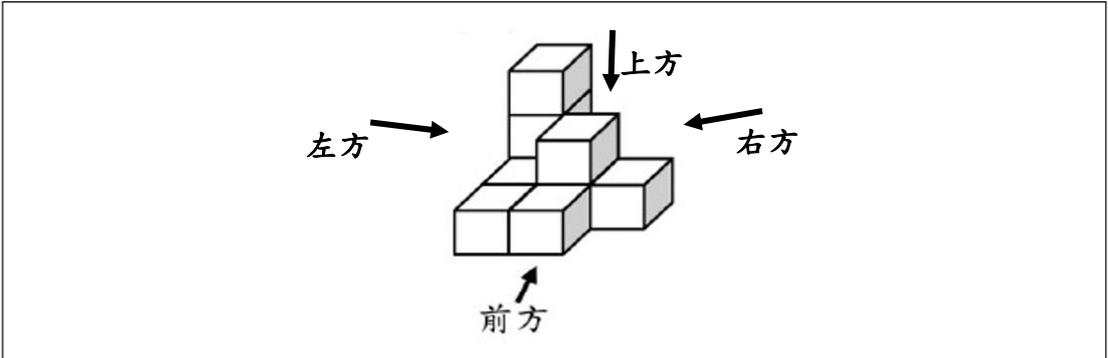
補救教學建議

(一) 強調確定方位才能確定視圖

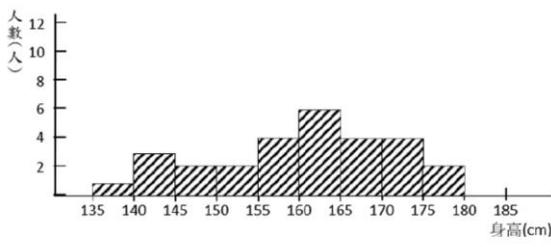
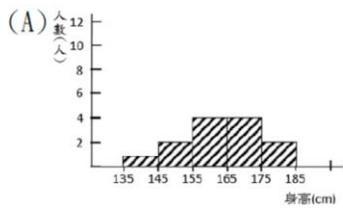
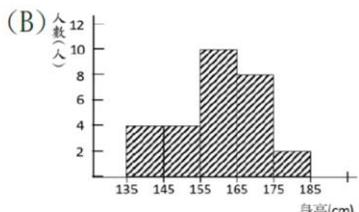
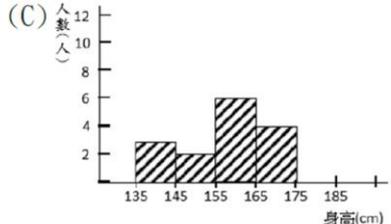
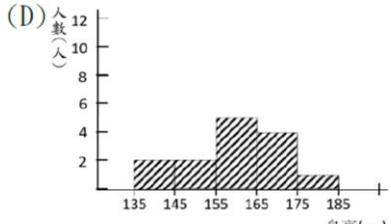
1. 給定實物立體圖形引導學生討論此立體圖形的樣貌，透過從實物立體圖形的上方觀察以及水平方向的觀察，及繪製視圖的練習與同班坐不同位置的同學討論，來理解觀察位置的不同與視圖（上、前、後、左、右視圖）的差異。
2. 整合前面對各方向視圖的學習，確定以立體圖形前方的觀察者位置，以下圖為例。

上視圖	前視圖	左視圖	右視圖

(二) 以此題為例



上視圖	前視圖	左視圖	右視圖

題號	3		
內容領域	資料與不確定性	認知歷程向度	程序執行
學習內容	D-7-1 統計圖表：蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原始資料或百分率的統計圖表：直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表。遇到複雜數據時可使用計算機輔助，教師可使用電腦應用軟體演示教授。		
試題內容	<p>3. 阿立班上這學期全班的身高直方圖如下。</p>  <p>將組距改成是 10 公分後，下列何者為其身高直方圖？</p> <p>(A) </p> <p>(B) </p> <p>(C) </p> <p>(D) </p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.14	0.00
2*	0.76	0.49	0.96
3	0.11	0.23	0.02
4	0.07	0.13	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.76	鑑別度	0.46

試題品質分析

1. 本題鑑別度為0.46，正確答案為選項B，通過率為76%，顯示七成六的學生已具備繪製與解讀直方圖的能力。
2. 有6%的學生選擇A (低分組有14%)，這些學生未考慮組距已調整，純粹以135~140、145~150、155~160、165~170、175~180公分的各組次數做為調整後135~145、145~155、155~165、165~175、175~185公分的各組次數。
3. 有11%的學生選擇C (低分組有23%)，這些學生未考慮組距已調整，純粹以135~140、140~145公分兩組次數的算術平均值代表調整後135~145的次數；同樣也以145~150、150~155公分兩組中的算術平均值代表調整後145~155的次數，其餘以此類推。
4. 有7%的學生選擇D (低分組有13%)，這些學生可能不懂組距調整為10公分的意涵，或者在計算數值時計算錯誤。

教材地位分析

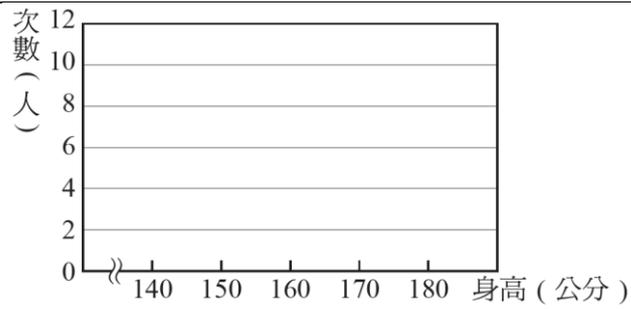
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	D-4-1 折線圖以及製作長條圖：報讀與說明生活中的長條圖與折線圖。配合其他領域課程，學習製作長條圖。備註：教學與示例應注意處理「分類資料」與「有序變化性資料」之差別。	D-7-1 統計圖表：蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原始資料或百分率的統計圖表：直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表。遇到複雜數據時可使用計算機輔助，教師可使用電腦應用軟體演示教授。	D-9-1 統計數據的分佈：全距；四分位距；盒狀圖。 備註：D-7-2 處裡單一統計量(平均數、中位數、眾數)表達數據，本條目則傳達以盒狀圖描述數據的集中程度。

補救教學建議

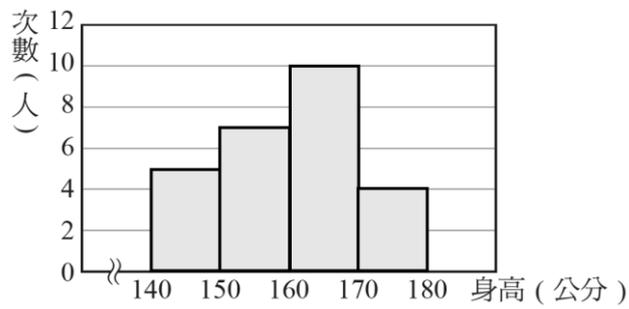
複習由分組次數分配表製作直方圖，底下以班級的身高分組次數分配表為例，說明如何製作直方圖：

身高(公分)	140~150	150~160	160~170	170~180	合計
次數(人)	5	7	10	4	25

步驟一：繪製直方圖的橫軸及縱軸，在兩個軸上標上適當的刻度，並標示類別及單位，其中橫軸0到140公分沒有對應的次數，可以在橫軸上標記省略符號 $\}}$ 。



步驟二：為了表達身高 140~150 公分的學生有 5 人，我們在橫軸上以刻度 140 到 150 的線段為底，對應的次數值 5 為高，畫出長方形；接下來以此類推分別畫出 150~160、160~170、170~180 公分的長條，請注意長條與長條之間必須互相緊鄰，沒有間距。



題號	4		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-7-7 一元一次不等式的意義：不等式的意義；具體情境中列出一元一次不等式。		
試題內容	<p>4. 「清清飲料店綠茶多多一杯 35 元，紅豆牛奶一杯 45 元，購買金額達 490 元，享免費外送服務。小嫻買了綠茶多多和紅豆牛奶總共 12 杯，且有達到免費外送的條件。請問小嫻買了多少杯綠茶多多？」</p> <p>假設綠茶多多買了 x 杯，依題意可以列出下列哪個一元一次不等式？</p> <p>(A) $35x + 45(12 - x) \geq 490$</p> <p>(B) $35x + 45(12 - x) \leq 490$</p> <p>(C) $45x + 35(12 - x) \geq 490$</p> <p>(D) $45x + 35(12 - x) \leq 490$</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1 *	0.73	0.42	0.96
2	0.11	0.23	0.03
3	0.11	0.24	0.01
4	0.05	0.11	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.73	鑑別度	0.54
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為 0.54，正確答案為選項 A，通過率為 73%，顯示超過七成的學生已掌握一元一次不等式的意義。</p> <p>2. 有 11%的學生選擇 B (低分組有 23%)，這些學生可能了解購買總金額的列式，但列錯不等式方向，這些學生可能尚未掌握一元一次不等式的意義。</p> <p>3. 有 11%的學生選擇 C (低分組有 24%)，這些學生可能誤將 x 當成紅茶杯數而列錯購買總金額式子，而不等式方向正確，這些學生可能部分掌握一元一次不等式的意義。</p> <p>4. 有 5%的學生選擇 D (低分組有 11%)，這些學生可能僅是猜測答案，尚未掌握一元一次不等式的意義。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	無	A-7-7 一元一次不等式的意義：不等式的意義；具體情境中列出一元一次不等式。	無

補救教學建議

(一) 複習不等式的意義。

不等號有 $>$ 、 \geq 、 $<$ 、 \leq ，以我們的習慣用語與不等號進行搭配。

習慣用語	不等號
大於、超過、高於、...	$>$
不小於、至少、以上(包含)、...	\geq
小於、未滿、低於、不足、...	$<$
不大於、不超過、至多、以下(包含)、...	\leq

(二) 以本題為例，進行解題說明。

1. 將應用問題進行列式

購買金額是綠茶多多與紅豆牛奶共 12 杯

綠茶多多買了 x 杯，則紅豆牛奶買了 $(12-x)$ 杯

所以購買金額合計是 $35 \times x + 45 \times (12-x)$
 $= 35x + 45(12-x)$

2. 不等式列式

題意「購買金額達 490 元」，表示金額至少 490，

也就是購買金額需大於或等於 490，則購買金額 ≥ 490

所以 $35x + 45(12-x) \geq 490$

題號	5		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-8-1 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。 備註：可使用乘法公式來化簡的根式，待乘法公式單元再提及。		
試題內容	<p>5. 將算式 $\sqrt{18} - \frac{\sqrt{18}}{3} \div \sqrt{\frac{26}{21}} \times \sqrt{\frac{13}{3}}$ 化為最簡根式？</p> <p>(A) $\sqrt{42}$ (B) $2\sqrt{14}$ (C) $3\sqrt{2} - \sqrt{7}$ (D) $3\sqrt{7} - \sqrt{21}$</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.13	0.01
2	0.13	0.24	0.03
3*	0.62	0.36	0.89
4	0.19	0.26	0.07
未作答	0.01		
通過率	0.62	鑑別度	0.53
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.53，正確答案為選項C，通過率為62%，顯示六成的學生已掌握根式的化簡及四則運算的概念。</p> <p>2. 有6%的學生選擇A (低分組有13%)，有13%的學生選擇B (低分組有24%)，這些學生對同類方根方可做加減的概念不清，尚未掌握根式的化簡及四則運算的概念。</p> <p>4. 有19%的學生選擇D (低分組有26%)，這些學生尚未掌握根式的化簡及四則運算的概念。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-7-6 指數的意義：指數為非負整數的次方；$a \neq 0$ 時 $a^0=1$；同底數的大小比較；指數的運算。</p> <p>N-7-7 指數律：以數字例表示「同底數的乘法指數律」($a^m \cdot a^n = a^{m+n}$、$(a^m)^n = a^{mn}$、$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$，其中 m, n 為非負整數)；以數字例表示「同底數的除法指數律」($a^m / a^n = a^{m-n}$，其中 $m \geq n$ 且 m, n 為非負整數)。</p>	<p>N-8-1 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。 備註：可使用乘法公式來化簡的根式，待乘法公式單元再提及。</p>	<p>S-9-6 圓的幾何性質：圓心角、圓周角與所對應弧的度數三者之間的關係；圓內接四邊形對角互補；切線段等長。</p> <p>N-10-1 實數：數線，十進制小數的意義，三一律，有理數的十進制小數特徵，無理數之十進制小數的估算 ($\sqrt{2}$ 為無理數的證明★)，科學記號數字的運算。 備註：定義科學記號數字的有效位數，在運算之後應維持原本的有效位數。★</p> <p>N-10-3 指數：非負實數之小數或分數次方的意義，幾何平均數與算幾不等式，複習指數律，實數指數的意義，使用計算機的 x^y 鍵。</p> <p>G-10-2 直線方程式：斜率，其絕對值的意義，點斜式，點與直線之平移，平行線、垂直線的方程式。點到直線的距離，平行線的距離、二元一次不等式。</p>
補救教學建議			
<p>(一) 複習平方根： 因為 $2 \times 2 = 4$，所以 2 是 4 的平方根。 因為 $3 \times 3 = 9$，所以 3 是 9 的平方根。 因為 $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$，所以 $\sqrt{3}$ 是 3 的平方根。</p> <p>(二) 平方根的四則運算 1. 用平方來看方根的乘除：</p>			

(1) 以 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 為例，引導學生理解 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3}$ 。

$ \begin{aligned} &(\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2 \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \\ &= (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{3}) \\ &= 2 \times 3 \\ &= 6 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} &(\sqrt{2 \times 3})^2 \\ &= \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{2 \times 3} \\ &= \sqrt{6} \times \sqrt{6} \\ &= 6 \end{aligned} $
--	---

(2) 以 $\sqrt{2} \div \sqrt{3}$ 為例，引導學生理解 $\sqrt{2} \div \sqrt{3} = \sqrt{2 \div 3} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ 。

$ \begin{aligned} &(\sqrt{2} \div \sqrt{3})^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} &(\sqrt{2 \div 3})^2 \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned} $
--	---

2. 用平方來看方根的加減：

(1) 以 $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ 為例，澄清 $\sqrt{3} - \sqrt{2} \neq \sqrt{3-2}$

$ \begin{aligned} &(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \\ &= (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ &= 5 - 2\sqrt{6} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} &(\sqrt{3-2})^2 \\ &= (\sqrt{1})^2 \\ &= 1 \end{aligned} $
--	--

(2) 以多項式同類項加減合併運算的概念說明同類方根方可加減合併運算。

(三) 以本例來說：

$$\begin{aligned}
 \sqrt{18} - \frac{\sqrt{18}}{3} \div \sqrt{\frac{26}{21}} \times \sqrt{\frac{13}{3}} &= \sqrt{3 \times 3 \times 2} - \frac{1}{3} \times \sqrt{18} \div \sqrt{\frac{26}{21}} \times \sqrt{\frac{13}{3}} \\
 &= 3\sqrt{2} - \frac{1}{3} \times \left(\sqrt{18 \div \frac{26}{21} \times \frac{13}{3}} \right) = 3\sqrt{2} - \frac{1}{3} \times \left(\sqrt{18 \times \frac{21}{26} \times \frac{13}{3}} \right) \\
 &= 3\sqrt{2} - \frac{1}{3} \times \sqrt{9 \times 7} = 3\sqrt{2} - \frac{1}{3} \times 3\sqrt{7} = 3\sqrt{2} - \sqrt{7}。
 \end{aligned}$$

題號	6		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行

學習內容	A-8-4 因式分解：因式的意義（限制在二次多項式的一次因式）；二次多項式的因式分解意義。		
試題內容	<p>6. 已知 $(x-2)$ 與 $(2x+3)$ 均是多項式 $ax^2+bx-18$ 的因式，下列何者<u>不是</u>多項式 $ax^2+bx-18$ 因式分解後的式子？</p> <p>(A) $(x-2)(6x+9)$</p> <p>(B) $(3x-6)(2x+3)$</p> <p>(C) $(3x+6)(2x-3)$</p> <p>(D) $3(x-2)(2x+3)$</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.13	0.22	0.03
2	0.11	0.23	0.02
3*	0.53	0.26	0.88
4	0.22	0.29	0.07
未作答	0.00		
通過率	0.53	鑑別度	0.62
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為 0.62，正確答案為選項 C，通過率為 53%，顯示超過五成的學生已理解因式分解的意義。</p> <p>2. 有 13% 的學生選擇 A (低分組有 22%)，也有 11% 的學生選擇 B (低分組有 23%)，這些學生可能誤解題意，以為要選正確因式分解的選項。</p> <p>3. 有 22% 的學生選擇 D (低分組有 29%)，這些學生可能以為因式分解不可以提出常數在括號外，也可能誤以為要選正確因式分解的選項。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>A-8-3</p> <p>多項式的四則運算：直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至三次）；被除式為二次之多項式的除法運算。</p> <p>備註：不涉及使用分離係數法。</p>	<p>A-8-4</p> <p>因式分解：因式的意義（限制在二次多項式的一次因式）；二次多項式的因式分解意義。</p>	<p>A-8-5</p> <p>因式分解的方法：提公因式法；利用乘法公式與十字交乘法因式分解。</p> <p>備註：只處理整係數 ax^2+bx+c 的因式分解或與乘法公式直接相關者，不處理一般二元齊次或二元非齊次式但有一次介入者。</p>

補救教學建議

(一) 先複習整數的因數、倍數關係。

例如： $12=4\times 3$ ，表示 12 是 3 的倍數，也是 4 的倍數；反過來說 3 和 4 都是 12 的因數。

(二) 再類推到多項式的因式、倍式關係。

例如： $(4x^2+6x+2)=(2x+2)(2x+1)$ ，其中 $(2x+2)$ 可以提出常數 2 變為

$2(x+1)$ ，因此 $(4x^2+6x+2)$ 可表示為 $2(x+1)(2x+1)$ ，因此 2 、 $(x+1)$ 、 $(2x+1)$

都是 $(4x^2+6x+2)$ 的因式，反過來說 $(4x^2+6x+2)$ 是 2 、 $(x+1)$ 、 $(2x+1)$ 的倍式。

(三) 因式和因式的乘積變也可能成為因式：

上述 2 、 $(x+1)$ 、 $(2x+1)$ 是不同的因式，我們也可以利用 $2\times(x+1)$ 、

$2\times(2x+1)$ 、 $(x+1)\times(2x+1)$ 組合出不同的因式。

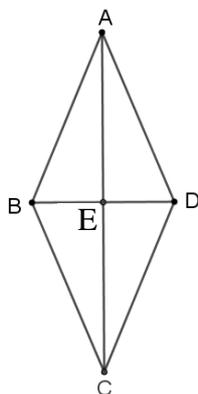
題號	7		
內容領域	空間形狀與坐標幾何	認知歷程向度	程序執行
學習內容	S-7-5 線對稱的基本圖形：等腰三角形；正方形；菱形；箏形；正多邊形。		
試題內容	<p>7. 設四邊形 $ABCD$ 為一菱形，其對角線的交點為 E。已知 $\overline{AE} = 12$，$\overline{BE} = 8$，則菱形 $ABCD$ 的面積是多少？</p> <p>(A)48 (B)96 (C)192 (D)384</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.10	0.18	0.04
2	0.29	0.45	0.09
3*	0.53	0.25	0.84
4	0.08	0.12	0.04
未作答	0.00		
通過率	0.53	鑑別度	0.58
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為 0.58，正確答案為選項 C，通過率為 53%，顯示五成的學生已掌握菱形面積的解法。</p> <p>2. 有 10% 的學生選擇 A (低分組有 18%)，這些學生可能了解菱形面積的計算，但將 \overline{AE}、\overline{BE} 當成對角線進行計算面積 $= \frac{12 \times 8}{2} = 48$，這些學生可能部分掌握菱形面積的解法。</p> <p>3. 有 18% 的學生選擇 B (低分組有 45%)，這些學生可能直接將題目所給的兩個數據相乘計算面積 $= 12 \times 8 = 96$，這些學生可能尚未掌握菱形面積的解法。</p> <p>4. 有 8% 的學生選擇 D (低分組有 12%)，這些學生可能正確算出兩對角線長分別為 24 及 16，而在計算菱形面積時直接相乘得 $24 \times 16 = 384$，這些學生可能尚未掌握菱形面積的解法。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	無	S-7-5 線對稱的基本圖形：等腰三角形；正方形；菱形；箏形；正多邊形。	S-8-4 全等圖形 S-8-5 三角形的全等性質 S-8-6 畢氏定理 S-8-7 平面圖形的面積 S-8-8 三角形的基本性質 S-8-9 平行四邊形的基本性質 S-8-10 正方形、長方形、箏形的基本性質 S-8-11 梯形的基本性質 S-8-12 尺規作圖與幾何推理

補救教學建議

(一) 複習等腰三角形、正方形、菱形、箏形、正多邊形為線對稱圖形的幾何性質。

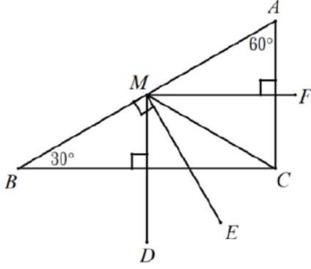
(二) 以本題為例，進行解題說明。



1. ABCD 為菱形， \overline{AC} 、 \overline{BD} 為其對角線，且皆為對稱軸，因此對角線將菱形分成四個大小一樣且都是直角三角形。

2. 因為 $\triangle ABE$ 為直角三角形，故 $\triangle ABE$ 面積 = $\frac{1}{2} \overline{BE} \times \overline{AE}$

因此菱形 ABCD 面積 = $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BE} \times \overline{AE} = 2 \cdot 12 \cdot 8 = 192$ 。

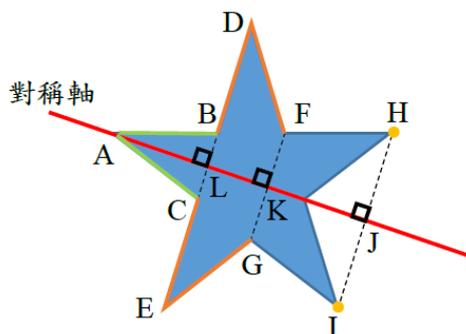
題號	8		
內容領域	空間形狀與坐標幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	S-7-3 垂直：垂直的符號；線段的中垂線；點到直線距離的意義。		
試題內容	<p>8. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 60^\circ$，$\angle B = 30^\circ$。 設 M 為 \overline{AB} 的中點，且 $\overline{MD} \perp \overline{BC}$、$\overline{ME} \perp \overline{AB}$、$\overline{MF} \perp \overline{AC}$。</p>  <p>請問下列選項何者是 \overline{AB} 的中垂線？</p> <p>(A) \overline{MC} (B) \overline{MD} (C) \overline{ME} (D) \overline{MF}</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.25	0.01
2	0.07	0.17	0.01
3*	0.78	0.50	0.98
4	0.03	0.08	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.78	鑑別度	0.48
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.48，正確答案為選項C，通過率為78%，顯示近八成的學生已掌握判斷線段的中垂線的概念。</p> <p>2. 12%的學生選擇A(低分組有25%)，7%的學生選擇B(低分組有17%)，3%的學生選擇D(低分組有8%)，這些學生尚未掌握判斷線段的中垂線的概念。</p>			

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>S-5-4 線對稱：線對稱的意義。「對稱軸」、「對稱點」、「對稱邊」、「對稱角」。由操作活動知道特殊平面圖形的線對稱性質。利用線對稱做簡單幾何推理。製作或繪製線對稱圖形。</p> <p>備註：從操作活動察覺正三角形、等腰三角形、正方形、長方形、菱形、箏形(箏形指圖形，名詞不出現)、等腰梯形是線對稱圖形(避免告知)。在教學呈現時，線對稱軸應為垂直或平行(操作活動不在此限)。可處理正多邊形。</p>	<p>S-7-3 垂直：垂直的符號；線段的中垂線；點到直線距離的意義。</p>	<p>S-8-1 角：角的種類；兩個角的關係(互餘、互補、對頂角、同位角、內錯角、同側內角)；角平分線的意義。</p> <p>S-8-3 平行：平行的意義與符號；平行線截角性質；兩平行線間的距離處處相等。</p> <p>S-8-4 全等圖形：全等圖形的意義(兩個圖形經過平移、旋轉或翻轉可以完全疊合)；兩個多邊形全等則其對應邊和對應角相等(反之亦然)。</p>

補救教學建議

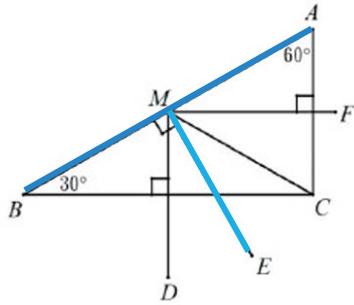
- (一) 複習線對稱圖形以及「對稱軸」、「對稱點」。
- (二) 以對稱軸垂直且平分對稱點的連線說明對稱軸是對稱點連線的垂直平分線，並強調「垂直」與「平分」，以下圖中的對稱圖形為例



J 點是 \overline{HI} 的中點，對稱軸通過 J 點又垂直 \overline{HI} ，所以對稱軸「垂直」且「平分」 \overline{HI} ，
對稱軸是 \overline{FG} 的垂直平分線(簡稱中垂線)。
K 點是 \overline{FG} 的中點，對稱軸通過 K 點又垂直 \overline{FG} ，所以對稱軸「垂直」且「平分」 \overline{FG} ，對稱軸是 \overline{HI} 的垂直平分線(簡稱中垂線)。
L 點是 \overline{BC} 的中點，對稱軸通過 L 點又垂直 \overline{BC} ，所以對稱軸「垂直」且「平

分」 \overline{BC} ，對稱軸是 \overline{BC} 的垂直平分線(簡稱中垂線)。

(三) 以本題為例



\overline{AB} 的中垂線要「垂直」且「平分」 \overline{AB} ，因此要先找 \overline{AB} 的中點 M ，再找通過 M 點又「垂直」 \overline{AB} 的的直線， \overline{EM} 即為所求。

題號	9		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	概念理解
學習內容	A-8-6 一元二次方程式的意義：一元二次方程式及其解，具體情境中列出一元二次方程式。		
試題內容	<p>9. 下列哪個一元二次方程式的其中一個解是 $x = -5$?</p> <p>(A) $x(x - 5) = 0$</p> <p>(B) $(x + 5)(x - 3) = 0$</p> <p>(C) $(x + 5)(x - 5) = -10$</p> <p>(D) $(x + 6)(x + 4) = 1$</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.24	0.01
2*	0.59	0.23	0.96
3	0.21	0.38	0.02
4	0.07	0.14	0.01
未作答	0.00		
通過率	0.59	鑑別度	0.73
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為 0.73，正確答案為選項 B，通過率為 59%，顯示近六成的學生已具備檢驗一元二次方程式解的能力。</p> <p>2. 有 12% 的學生選擇 A (低分組有 24%)，這些學生可能不理解一元二次方程式解的意義，看到 $x(x-5)=0$，誤以為 $x=-5$。</p> <p>3. 有 21% 的學生選擇 C (低分組有 38%)，這些學生忽略一元二次方程式等號的右邊不為 0，以為將 $x=-5$ 代入 $(x+5)(x-3)$ 後為 0，代表 $x=-5$ 就是解。</p> <p>4. 有 7% 的學生選擇 D (低分組有 14%)，這些學生將 $x=-5$ 代入 $(x+6)(x+4)$ 計算錯誤得到 $(-5+6)(-5+4)=1 \times 1=1$，誤以為 $x=-5$ 就是解。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	A-7-2 一元一次方程式的意義：一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。	A-8-6 一元二次方程式的意義：一元二次方程式及其解，具體情境中列出一元二次方程式。	無

補救教學建議

下面以「求方程式 $(x-3)(x+1)=0$ 的解」為例，說明如何幫助學生解題：

(一) 複習方程式解的意義：

將 $x=a$ 代入方程式之後，能讓等號成立，稱 a 為方程式的解。

例如：一元一次方程式「 $x-1=0$ 」，以 $x=1$ 代入，得到 $1-1=0$ ，讓方程式成立，所以「1」是方程式「 $x-1=0$ 」的解。

(二) 複習一元一次方程式求解：

若一元一次方程式 $x+a=0$ ，它的解為 $-a$ ， $x-b=0$ 的解為 b 。

(三) 講解一元二次方程式求解：

1. 利用「0 乘以任何數都等於0」及「非0的兩數，其乘積必仍非0」，以表格方式幫助學生發現「若 $ab=0$ ，則 $a=0$ 或 $b=0$ 」，如下表：

	$a=0$	$a \neq 0$
$b=0$	$ab=0$	$ab=0$
$b \neq 0$	$ab=0$	$ab \neq 0$

必要時，可以分別將 $a \neq 0$ 細分成 $a > 0$ 和 $a < 0$ 。

同理，也將 $b \neq 0$ 細分成 $b > 0$ 和 $b < 0$ 。

2. 舉例說明如何求解 $(x-3)(x+1)=0$ 。

由上表知： $(x-3)(x+1)=0$ 則 $x-3=0$ 或 $x+1=0$ 。

利用一元一次方程式求解，得 $x=3$ 或 $x=-1$ 。

最後，幫助學生建立驗算的良好習慣，

再分別將 $x=3$ 或 $x=-1$ 代入原式，檢查看看。

題號	10		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-8-3 多項式的四則運算：直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至三次）；被除式為二次之多項式的除法運算。 備註：不涉及使用分離係數法。		
試題內容	10. 請問 $(4x^2 + 1) \div (2x + 1)$ 的餘式是多少？ (A)2 (B)0 (C)-1 (D) $1 - 2x$		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.41	0.19	0.72
2	0.18	0.25	0.08
3	0.14	0.24	0.03
4	0.27	0.31	0.16
未作答	0.00		
通過率	0.41	鑑別度	0.53
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.53，正確答案為選項A，通過率為41%，顯示超過四成的學生已掌握多項式除法的運算。</p> <p>2. 有18%的學生選擇B（低分組有25%），這些學生可能認為被除式及除式的常數項都是1，因此整除，所以餘式為0，這些學生可能尚未掌握多項式除法的運算。</p> <p>3. 有14%的學生選擇C（低分組有24%），這些學生可能誤將$4x^2$視為$4x$，算成$(4x+1) \div (2x+1)$，所以餘式為-1，這些學生可能部分掌握多項式除法的運算。</p> <p>4. 有27%的學生選擇D（低分組有31%），這些學生可能只算到商式為$2x$，所以餘式為$-2x+1$，這些學生可能部分掌握多項式除法的運算。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	無	A-8-3 多項式的四則運算：直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至三次）；被除式為二次之多項式的除法運算。 備註：不涉及使用分離係數法。	無

(一) 複習多項式的四則運算。

1. 複習多項式的加減運算

以「 $(2x^2+5x^3+7x+1)+(3x^3-7x^2+5x-4)$ 」為例，說明多項式的加減運算。

步驟一：先以降幂方式排列，單項間都以+(加)連接

$$2x^2+5x^3+7x+1=5x^3+2x^2+7x+1$$

$$3x^3-7x^2+5x-4=3x^3+(-7)x^2+5x+(-4)$$

步驟二：採取下列三種方式之一進行運算

(1) 位值表格

	x^3	x^2	x	1
	5	2	7	1
+	3	-7	5	-4
結果	8	-5	12	-3

(2) 直式加法

$$\begin{array}{r}
 5x^3 + 2x^2 + 7x + 1 \\
 +) 3x^3 + (-7)x^2 + 5x + (-4) \\
 \hline
 8x^3 + (-5)x^2 + 12x + (-3)
 \end{array}$$

結果記為 $8x^3-5x^2+12x-3$

(3) 橫式計算

$$\begin{aligned}
 &(2x^2+5x^3+7x+1)+(3x^3-7x^2+5x-4) \\
 &=5x^3+2x^2+7x+1+3x^3+(-7)x^2+5x+(-4) \\
 &=5x^3+3x^3+2x^2+(-7)x^2+7x+5x+1+(-4) \\
 &=8x^3+(-5)x^2+12x+(-3) \\
 &=8x^3-5x^2+12x-3
 \end{aligned}$$

2. 複習多項式的乘法運算

以「 $(7x+2x^2+1)\times(5x+4)$ 」為例，說明多項式的乘法運算。

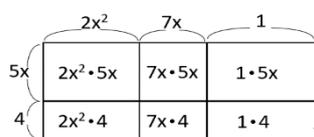
步驟一：先以降幂方式排列，單項間都以+(加)連接

$$7x+2x^2+1=2x^2+7x+1$$

$$5x+4=5x+4$$

步驟二：採取下列三種方式之一進行運算

(1) 長方形面積



(2) 直式乘法

$$\begin{array}{r}
 + 7x + 1 \\
 + 5x + 4 \\
 \hline
 2x^2 \cdot 4 + 7x \cdot 4 + 1 \cdot 4 \leftarrow (2x^2+7x+1) \cdot 4 \\
 2x^2 \cdot 5x + 7x \cdot 5x + 1 \cdot 5x \leftarrow (2x^2+7x+1) \cdot 5x \\
 \hline
 10x^3 + 43x^2 + 33x + 4
 \end{array}$$

(3) 橫式計算 (可由直式乘法觀察改寫成)

$$\begin{aligned} &(7x+2x^2+1)\times(5x+4) \\ &=(2x^2+7x+1)\cdot 5x+(2x^2+7x+1)\cdot 4 \\ &=2x^2\cdot 5x+7x\cdot 5x+1\cdot 5x+2x^2\cdot 4+7x\cdot 4+1\cdot 4 \\ &=10x^3+35x^2+5x+8x^2+28x+4 \\ &=10x^3+43x^2+33x+4 \end{aligned}$$

3. 複習多項式的除法運算

以「 $(4x^2+4x+3)\times(2x+1)$ 」為例，說明多項式的除法運算。

因為 $(2x)\cdot(2x)=4x^2$

直式除法

估計 $4x^2+4x+3$ 是 $2x+1$ 的 $2x$ 倍

利用先乘後減運算得

$$(4x^2+4x+3)-(2x+1)\cdot(2x)$$

$$=(4x^2+4x+3)-(4x^2+2x)$$

$$=2x+3$$

又 $(2x)\cdot 1=2x$

估計 $2x+3$ 是 $2x+1$ 的 1 倍

利用先乘後減運算得

$$(2x+3)-(2x+1)\cdot 1$$

$$=(2x+3)-(2x+1)$$

$$=2$$

$$\begin{array}{r} \overline{) 4x^2+4x+3} \\ -) 4x^2+2x \quad \leftarrow (2x+1)\cdot(2x) \\ \hline 2x+3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{) 4x^2+4x+3} \\ -) 4x^2+2x \quad \leftarrow (2x)\cdot 1 \\ \hline 2x+3 \\ -) 2x+1 \quad \leftarrow (2x+1)\cdot 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

2 ...當次數小於除式次數，即為餘式

(二) 以本題為例，進行解題說明。

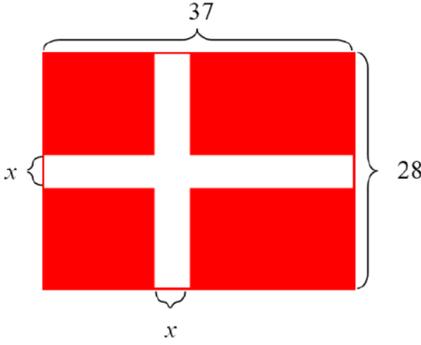
1. 檢查被除式及除式是否有缺項，若有缺項要補 0

被除式 $4x^2+1$ 缺一次項，需改寫成 $4x^2+0x+1$

2. 進行直式計算。目標是先從高次進行，因此被除式及除式皆需按降次排列

$$\begin{array}{r} \overline{) 4x^2 +1} \\ -) 4x^2 \\ \hline -2x \\ -) -2x \\ \hline 2 \end{array}$$

2 ←當次數小於除式次數時，即為餘式

題號	11		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。		
試題內容	<p>11. 小明有一幅丹麥的小國旗，最外圍的長方形長為 37 公分，寬為 28 公分，中間白色十字區域是由兩個寬度為 x 公分的長方形交叉而成。假設白色十字區域的面積為 244 平方公分，請問 $x = ?$</p>  <p>(單位：公分)</p> <p>(A)6 (B)5 (C)4 (D)3</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.13	0.23	0.02
2	0.13	0.25	0.02
3*	0.61	0.31	0.92
4	0.12	0.21	0.03
未作答	0.01		
通過率	0.61	鑑別度	0.61
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為 0.61，正確答案為選項 C，通過率為 61%，顯示六成的學生已具備運用一元二次方程式解應用問題的能力。</p> <p>2. 有 13%的學生選擇 A (低分組有 22%)，有 14%的學生選擇 B (低分組有 26%)，有 12%的學生選擇 D (低分組有 19%)，這些學生尚未具備運用一元二次方程式解應用問題的能力。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。	A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。	無
補救教學建議			
<p>(一) 複習一元一次方程式的意義：以符號代表數、一元一次式、一元一次方程式。</p> <p>(二) 複習一元二次方程式的列式。</p> <p>(三) 複習一元二次方程式的解的意義。</p> <p>(四) 複習一元二次方程式的解法。</p> <p>(五) 以本題為例，說明如何幫助學生解題：</p> <ol style="list-style-type: none"> 協助學生理解題意並掌握已知、未知條件以並找出關係。 <ol style="list-style-type: none"> 已知：國旗長 37 公分、國旗寬 28 公分、白色十字面積 244 平方公分。 未知：白色十字部分寬(x 公分)。 找關係：利用白色十字面積 244 平方公分列關係式 兩條長方形面積-重疊正方形面積=白色十字面積 $37x + 28x - x^2 = 244$ 用因式分解法解一元二次方程式 $37x + 28x - x^2 = 244$ $65x - x^2 = 244$ $0 = x^2 - 65x + 244$ 由 $244 = 4 \times 61$，$(-4) + (-61) = -65$ $(x-4)(x-61) = 0$ $x = 4$ 或 61(大於 37 公分，不合) 			

題號	12		
內容領域	數與量	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-8-6 等比數列：等比數列；給定首項、公比計算等比數列的一般項。 備註：不處理「已知等比數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公比」，例如：給定 a_5 和 a_9 的值，求首項和公比。		
試題內容	<p>12. 如圖，圖 1 到圖 4 是具備某種規律的圖形，且每個圖形內的白色細格都是一樣大的正方形。</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p style="text-align: center;">圖1 圖2 圖3 圖4</p> <p>已知圖 1 的白色細格面積佔整個大正方形面積的 $\frac{3}{4}$， 圖 2 的白色細格面積佔整個大正方形面積的 $\frac{9}{16}$。 依照這個規律，請問圖 5 的白色細格面積會佔整個大正方形面積的多少？</p> <p>(A) $\frac{27}{52}$ (B) $\frac{81}{256}$ (C) $\frac{243}{512}$ (D) $\frac{243}{1024}$</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.13	0.01
2	0.20	0.33	0.09
3	0.16	0.25	0.08
4*	0.58	0.28	0.83
未作答	0.00		
通過率	0.58	鑑別度	0.55

試題品質分析

1. 本題鑑別度為0.55，正確答案為選項D，通過率為58%，顯示近六成的學生已具備利用等比數列解題的能力。
2. 有6%的學生選擇A(低分組有13%)，這些學生可能未察覺等比數列的規律或者不理解等比數列的意義，得到錯誤算式如下：

圖別	1	2	3	4	5
白色佔全部面積的比例	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16} (= \frac{3+6}{4+12})$	$\frac{15}{28} (= \frac{9+6}{16+12})$	$\frac{21}{40} (= \frac{15+6}{28+12})$	$\frac{27}{52} (= \frac{21+6}{40+12})$

3. 有20%的學生選擇B(低分組有33%)，這些學生可能算到第4個圖形白色部份佔全部面積的比例，得到 $\frac{3}{4} \times (\frac{3}{4})^3 = \frac{81}{256}$ 。

4. 有16%的學生選擇C(低分組有25%)，這些學生可能計算錯誤如下：

$$\text{分子} (\frac{3}{4})^5 = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4} = \frac{243}{512}。$$

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-8-4 等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等數列的一般項。 備註：不處理「已知等差數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公差」，例如：給定 a_5 和 a_9 的值，求首項和公差。	N-8-6 等比數列：等比數列；給定首項、公比計算等比數列的一般項。 備註：不處理「已知等比數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公比」，例如：給定 a_5 和 a_9 的值，求首項和公比。	N-10-6 數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。

(一) 說明「等比數列」的名稱及其意義。

一數列中，若任意相鄰兩項的後項除以前項所得的商（比值）都相同，則稱之為等比數列，這個商（或比值）稱為公比，通常用 r 表示。例如：

1. 數列 1, 3, 9, 27, 81, ...

$$\text{因為 } \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = 3$$

所以 1, 3, 9, 27, 81, ... 是等比數列，公比為 3。

2. 數列 -2, 4, -8, 16, -32, ...

$$\text{因為 } \frac{4}{-2} = \frac{-8}{4} = \frac{16}{-8} = \frac{-32}{16} = -2$$

所以 -2, 4, -8, 16, -32, ... 是等比數列，公比為 -2。

3. 數列 $3, 3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2}, 12, \dots$

$$\text{因為 } \frac{3\sqrt{2}}{3} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{6} = \frac{12}{6\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

所以 $3, 3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2}, 12, \dots$ 是等比數列，公比為 $\sqrt{2}$ 。

(二) 底下以「3, 9, 27, 81, 243, 729 是否是等比數列？」為例

$$\text{因為 } \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = \frac{243}{81} = \frac{729}{243} = 3$$

所以 3, 9, 27, 81, 243, 729 是等比數列，公比為 3。

題號	13																						
內容領域	資料與不確定性	認知歷程向度	概念理解																				
學習內容	D-7-2 統計數據：用平均數、中位數與眾數描述一組資料的特性；使用計算機的「M+」或「Σ」鍵計算平均數。																						
試題內容	<p>13. 四個班舉行踢毽子比賽，每班選出 21 人測得踢毽子的統計結果如下表。</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>班級</th> <th>人數</th> <th>中位數 (次)</th> <th>平均數 (次)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>甲</td> <td>21</td> <td>95</td> <td>95</td> </tr> <tr> <td>乙</td> <td>21</td> <td>102</td> <td>94</td> </tr> <tr> <td>丙</td> <td>21</td> <td>89</td> <td>106</td> </tr> <tr> <td>丁</td> <td>21</td> <td>93</td> <td>105</td> </tr> </tbody> </table> <p>已知踢毽子次數 ≥ 100 次為優等，下列哪個班的優等人數最多？</p> <p>(A) 甲 (B) 乙 (C) 丙 (D) 丁</p>			班級	人數	中位數 (次)	平均數 (次)	甲	21	95	95	乙	21	102	94	丙	21	89	106	丁	21	93	105
班級	人數	中位數 (次)	平均數 (次)																				
甲	21	95	95																				
乙	21	102	94																				
丙	21	89	106																				
丁	21	93	105																				
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)																						
選項	整體	低分組	高分組																				
1	0.07	0.14	0.01																				
2*	0.43	0.24	0.70																				
3	0.31	0.37	0.19																				
4	0.19	0.25	0.09																				
未作答	0.00																						
通過率	0.43	鑑別度	0.47																				
試題品質分析																							
<p>1. 本題鑑別度為0.47，正確答案為選項B，通過率為43%，顯示超過四成的學生已具備中位數的概念。</p> <p>2. 有7%的學生選擇A(低分組有14%)，這些學生可能僅是猜測答案，尚未具備中位數的概念。</p> <p>3. 有31%的學生選擇C(低分組有37%)，這些學生可能直接從題目中數據最高的106認為是答案，這些學生可能尚未具備中位數的概念。</p> <p>4. 有 19%的學生選擇 D (低分組有 25%)，這些學生可能將每個班級的兩項數據加總後的判斷，甲=95+95=190、乙=102+94=196、丙=89+106=195、丁=93+105=198，這些學生可能尚未具備中位數的概念。</p>																							

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	D-6-1 圓形圖：報讀、說明與製作生活中的圓形圖。包含以百分率分配之圓形圖	D-7-2 統計數據：用平均數、中位數與眾數描述一組資料的特性；使用計算機的「M+」或「Σ」鍵計算平均數。	D-8-1 統計資料處理：累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。

補救教學建議

(一) 複習眾數、平均數及中位數三種描述資料集中趨勢代表量的概念。

1. 眾數

餐廳當天賣出的便當數量如下表

種類	雞排飯	排骨飯	牛肉飯	滷肉飯	素食便當
數量(人)	17	32	25	20	13

賣出的便當數量中，最有銷量的是哪一種？

「最有銷量」，就是在討論賣最多數量的種類，就是討論眾數。

2. 平均數

甲、乙兩班學生體重分布如下。

甲班的學生體重分布情形：

座號	1	2	3	4	5	6	7
體重	50	73	82	75	85	67	70

乙班的學生體重分布情形：

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9
體重	47	66	59	58	66	54	58	78	54

哪一班的體重比較重？

兩班學生人數不同，如果單純的將各班體重合計，肯定有爭議。但若將各班體重和再除以人數，得到的平均重量就可以比較了。

$$\text{甲班平均體重} = \frac{50+73+82+75+85+67+70}{7} \approx 71.7 \text{ 公斤}$$

$$\text{乙班平均體重} = \frac{47+66+59+58+66+54+58+78+54}{9} = 60 \text{ 公斤}$$

3. 中位數

兩間餐廳員工每個月的薪資分配如下：

丙餐廳員工月薪：30,000 元、35,000 元、38,000 元、42,000 元、45,000 元。

丁餐廳員工月薪：28,000 元、32,000 元、33,000 元、35,000 元、62,000 元。

哪一間餐廳員工的月薪比較高？

若用平均薪資來看，丙餐廳員工平均薪資 = $\frac{30+35+38+42+45}{5} = 3.8$ 萬

丁餐廳員工平均薪資 = $\frac{28+32+33+35+62}{5} = 3.8$ 萬一樣

但會發現丁餐廳有位員工的月薪高很多，平均數似乎被極端的月薪干擾。

改用中位數判斷。將一組數值資料由小到大排列，最中間的數值即為中位數。

兩餐廳員工都是 5 位，月薪的中位數會是由小到大排列的第 3 位數
所以丙餐廳員工月薪中位數是 38,000 元，丁餐廳員工月薪中位數 33,000 元，

丙餐廳員工的月薪比較高。

中位數的概念：將一組數值資料由小到大排列，最中間的數值即為中位數。

因此有一半的數值資料大於或等於中位數；有一半的數值資料小於或等於中位數。

(二) 以本題為例，進行解題說明。

四個班的人數都是 21 人，中位數是排序後由小到大的第 11 位。

甲班中位數是 95 次，表示至少有 11 位踢毽子次數達 95 次或超過 95 次。

乙班中位數是 102 次，表示至少有 11 位踢毽子次數達 102 次或超過 102 次。

丙班中位數是 89 次，表示至少有 11 位踢毽子次數達 89 次或超過 89 次。

丁班中位數是 93 次，表示至少有 11 位踢毽子次數達 93 次或超過 93 次。

而踢毽子次數 ≥ 100 次為優等，所以乙班優等人數最多。

題號	14		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-8-4 等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等差數列的一般項。 備註：不處理「已知等差數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公差」，例如：給定 a_5 和 a_9 的值，求首項和公差。		
試題內容	14. 有一等差數列為 99, 93, 87, 81, …，請問此數列的第幾項開始會出現負數？ (A)15 (B)16 (C)17 (D)18		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.08	0.16	0.02
2	0.11	0.19	0.04
3	0.31	0.36	0.17
4*	0.50	0.28	0.77
未作答	0.00		
通過率	0.50	鑑別度	0.48
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為0.48，正確答案為選項D，通過率為50%，顯示五成的學生已掌握給定首項、公差計算等差數列的一般項的能力。 2. 有8%的學生選擇A(低分組有16%)，有11%的學生選擇B(低分組有19%)，有31%的學生選擇C(低分組有36%)，這些學生尚未掌握給定首項、公差計算等差數列的一般項的能力。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	R-6-3 數量關係的表示：代數與函數的前置經驗。將具體情境或模式中的數量關係，學習以文字或符號列出數量關係的關係式。 備註：數量關係的表示例如：晝長夜長的關係可列成晝長+夜長=24。連結R-6-2。含部分運用符號的教學，連結國中「符號	N-8-4 等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等差數列的一般項。 備註：不處理「已知等差數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公差」，例如：給定 a_5 和 a_9 的值，求首項和公差。	N-10-6 數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。 備註：遞迴關係以一階為主，連結國中的等差數列和等比數列。數學歸納法應先透過觀察發現規律，然後用以證明；將數學歸納法的範例與應用，融入

代表數」或「未知數」教學，其教學重點在「關係的表示」，而非抽象的「代數符號演算」。		後續的課程，不必在此過度練習。可連結常用對數而求解 $a^x = b$ 之近似值。
---	--	---

補救教學建議

(一) 複習一元一次不等式的解法。

(二) 觀察數列中「後項-前項=定值(公差)」的關係，例如：

樣式一：1, 2, 3, 4, 5, …, n, 後一項都是前一項加 1。

第幾項	1	2	3	4	5	...	n
數值	1	2	3	4	5	...	n

樣式二：3, 6, 9, 12, 15, …, 3n, 後一項都是前一項加 3。

第幾項	1	2	3	4	5	...	n
數值	3	6	9	12	15	...	3n

樣式三：5, 8, 11, 14, 17, …, 3n+2, 後一項都是前一項加 3，但樣式三的各项比樣式二多 2。

第幾項	1	2	3	4	5	...	n
數值	5	8	11	14	17	...	2+3n

因此推斷出後項=前項+公差，公差=後項-前項。

(三) 以此題為例說明

首項 $a=99$ ，公差 $d=93-99=-6$

設第 n 項為為負數，則 $a_n=99+(n-1)\times(-6)<0$

$99-6n+6<0$

$-6n<-105$

$n>17\frac{1}{2}$

n 最小為 18，所以從第 18 項開始為負數。

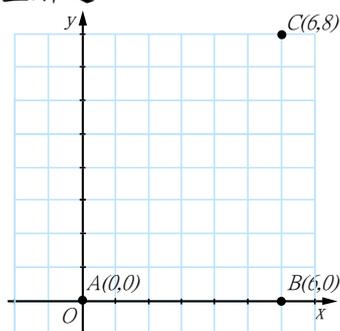
題號	15		
內容領域	空間形狀與坐標幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	G-8-1 直角坐標系上兩點距離公式：直角坐標系上兩點 A(a,b)和 B(c,d) 的距離為線段 $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ ；生活上相關問題。		
試題內容	<p>15. 小齊以合作社為起點，先向東走 20 公尺，再向北走 40 公尺，可以走回教室。如果從合作社先向西走 50 公尺，再向北走 280 公尺，則可以走到活動中心。請問教室和活動中心的直線距離為多少公尺？</p> <p>(A) $30\sqrt{65}$ (B) 250 (C) 310 (D) 390</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.18	0.21	0.10
2*	0.46	0.25	0.78
3	0.22	0.31	0.08
4	0.13	0.22	0.03
未作答	0.01		
通過率	0.46	鑑別度	0.53
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.53，正確答案為選項B，通過率為46%，顯示超過四成的學生已具備利用兩點距離公式解題的能力。</p> <p>2. 有18%的學生選擇A (低分組有21%)，這些學生可能未考慮移動的方向性，誤以為教室坐標為(20,40)，活動中心坐標為(50,280)，計算錯誤如下：</p> <p>教室和活動中心的距離 = $\sqrt{(50-20)^2 + (280-40)^2} = \sqrt{58500} = \sqrt{900 \times 65} = 30\sqrt{65}$</p> <p>3. 有22%的學生選擇C (低分組有31%)，這些學生可能誤以為教室坐標為(20,-40)，活動中心坐標為(50,280)，且無法利用兩點距離公式解題，計算錯誤如下：</p> <p>教室和活動中心的距離 = $50 + 20 - 40 + 280 = 310$</p> <p>4. 有13%的學生選擇D (低分組有22%)，這些學生可能誤以為教室坐標為(20,40)，活動中心坐標為(50,280)，且無法利用兩點距離公式解題，計算錯誤如下：</p> <p>教室和活動中心的距離 = $50 + 20 + 40 + 280 = 390$</p>			

教材地位分析

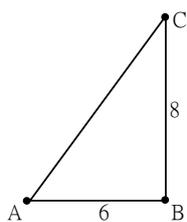
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	G-7-1 平面直角坐標系：以平面直角坐標系、方位距離標定位置；平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。 S-8-6 畢氏定理：畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形。	G-8-1 直角坐標系上兩點距離公式：直角坐標系上兩點 A(a,b)和 B(c,d)的距離為線段 $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ ；生活上相關問題。	無

補救教學建議

下面以「已知 A(0,0)、B(6,0)、C(6,8)三點，求 $\overline{AC} = ?$ 」為例，說明如何幫助學生解題。



- (一) 首先計算出 $\overline{AB} = 6 - 0 = 6$ ，因為 A、B 兩點都在 x 軸上。
- (二) 再計算出 $\overline{BC} = 8 - 0 = 8$ ，因為 B、C 兩點都平行於 y 軸。
- (三) 連接 A、B、C 三點，形成一個直角三角形，如下圖：



- (四) 利用畢氏定理： $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ ，

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

- (五) 如果學生記得兩點距離公式，也可以直接將 A、C 兩點坐標代入公式「 $\overline{AC} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ 」解題，

當 A(0,0)時，a=0，b=0；C(6,8)時，c=6，d=8，

$$\overline{AC} = \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

題號	16		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-7-8 一元一次不等式的解與應用：單一的一元一次不等式的解；在數線上標示解的範圍；應用問題。		
試題內容	<p>16. 解一元一次不等式 $7 - (x - 4) \leq 4x + 18$， 下列何者為 x 的範圍在數線上的圖解？</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>(A)</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>(C)</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <p>(B)</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>(D)</p> </div> </div>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.48	0.21	0.82
2	0.26	0.35	0.12
3	0.14	0.24	0.02
4	0.12	0.19	0.03
未作答	0.01		
通過率	0.48	鑑別度	0.61
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為 0.61，正確答案為選項 A，通過率為 48%，顯示近五成的學生已具備在數線上標示不等式解的範圍的能力。</p> <p>2. 有 26% 的學生選擇 B (低分組有 35%)，這些學生可能在等量公理的運算上沒問題，但不熟悉不等式上對於乘除負數的改變不等方向，這些學生可能部分具備在數線上標示不等式解的範圍的能力。</p> <p>3. 有 14% 的學生選擇 C (低分組有 24%)，這些學生可能僅是猜測答案，尚未具備在數線上標示不等式解的範圍的能力。</p> <p>4. 有 12% 的學生選擇 D (低分組有 19%)，這些學生可能在一次式的去括號出現錯誤，而正確在不等式上對於乘除負數的改變不等方向，這些學生可能部分具備在數線上標示不等式解的範圍的能力。</p> <p>$7 - x + 4 \leq 4x + 18 \rightarrow 3 - x \leq 4x + 18 \rightarrow -5x \leq 15 \rightarrow x \geq -3$。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	無	A-7-8 一元一次不等式的解與應用：單一的一元一次不等式的解；在數線上標示解的範圍；應用問題。	無

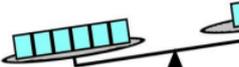
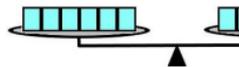
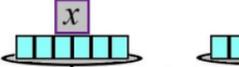
補救教學建議

(一) 複習一元一次不等式的解及在數線上標示解的範圍。

1. 複習一元一次不等式的解

(1) 一元一次不等式的等量加法

以「 $6 > 4 \rightarrow 6+x > 4+x$ 」為例，說明不等式的兩邊同時加上一個未知數，不等號左右兩邊的大小關係不會改變，不等號不會變號。

關係式	圖式
在等臂天秤的兩邊放上 6 顆和 4 顆一樣的積木。 $6 > 4$	
為了讓兩邊一樣重，我們在右邊加上 2 顆積木。 $6 = 4 + 2$	
在天秤的兩邊同時加上 1 顆重量為 x 的積木，天秤兩邊還是會維持會平衡。 $6+x = (4+2)+x$	
最後，我們將右邊增加的 2 顆積木拿掉，得到 $6+x > 4+x$	

(2) 一元一次不等式的等量減法

以「 $6 > 4 \rightarrow 6-x > 4-x$ 」為例，說明不等式的兩邊同時減去一個未知數，不等號左右兩邊的大小關係不會改變，不等號不會變號。

關係式	圖式
已知	$6 > 4$
在式子的右邊加 2，讓左右兩邊相等。	$6 = 4 + 2$
在左右兩邊同時減 x 。	$6-x = (4+2)-x$
最後，將右邊增加的 2 減掉。	$6-x > 4-x$

(3) 一元一次不等式的等量乘法、除法

當乘以或除以正數時，想法與上述加減法一樣，需要特別注意的是乘以或除以負數時。

① 當 $a > b$ 時， a 的相反數 $< b$ 的相反數，則 $-a < -b$

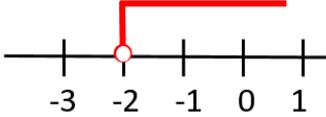
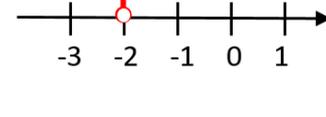
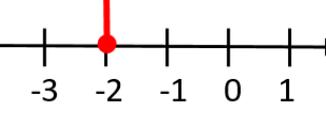
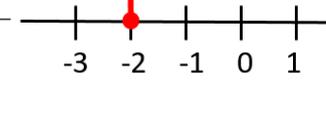
也就是 $a > b$ 時，將 a 、 b 時乘以 (-1) ，得到 a 、 b 的相反數 $-a$ 、 $-b$ ，得到 $-a < -b$ 。

② 以「解一元一次不等式 $-5x > 10$ 」為例

$$\text{乘以 } \left(-\frac{1}{5}\right) \Rightarrow (-5x) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) < 10 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \Rightarrow x < -2。$$

2. 複習一元一次不等式在數線上標示解的範圍。

將不等式在數線上標示，有以下 4 種圖示：

<p>$x > -2$ 代表「x 比 -2 大」，因為 $x > -2$ 不包含 -2，所以數線上 -2 的點要標示 空心，再將數線上 -2 的點往上拉一條線往 右邊 畫。</p>	
<p>$x < -2$ 代表「x 比 -2 小」，因為 $x < -2$ 不包含 -2，所以數線上 -2 的點要標示 空心，再將數線上 -2 的點往上拉一條線往 左邊 畫。</p>	
<p>$x \geq -2$ 代表「x 等於 -2」或「x 比 -2 大」，因為 $x \geq -2$ 包含 -2，所以數線上 -2 的點要標示 實心，再將數線上 -2 的點往上拉一條線往 右邊 畫。</p>	
<p>$x \leq -2$ 代表「x 等於 -2」或「x 比 -2 小」，因為 $x \leq -2$ 包含 -2，所以數線上 -2 的點要</p>	

(二) 以 $7 - (x + 4) \leq 4x + 18$ 為例，進行解題說明。

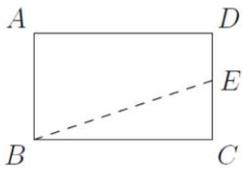
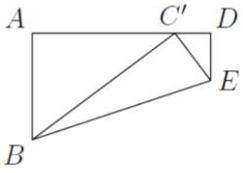
$$7 - (x + 4) \leq 4x + 18$$

$$11 - x \leq 4x + 18 \quad \text{利用等量公理，兩側同時減 } 4x，\text{同時減 } 11$$

$$-x - 4x \leq 18 - 11$$

$$-5x \leq 7 \quad \text{兩側同時乘以 } -\frac{1}{5}，\text{不等方向改變}$$

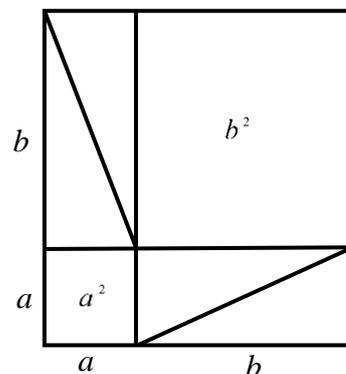
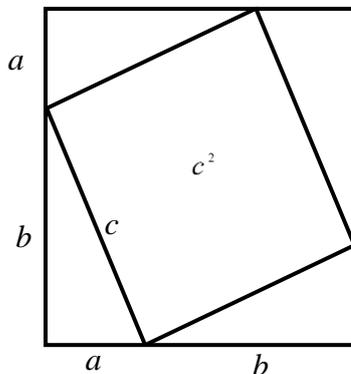
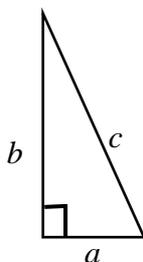
$$x \geq -\frac{7}{5}$$

題號	17		
內容領域	空間形狀與坐標幾何	認知歷程向度	解題思考
學習內容	S-8-6 畢氏定理：畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形。		
試題內容	<p>17. 圖（一）的長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} = 3$、$\overline{BC} = 5$，現以 \overline{BE} 為摺痕，將 C 摺至 \overline{AD} 上的 C' 點，如圖（二）所示。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>圖（一）</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>圖（二）</p> </div> </div> <p>請問 $\overline{CE} = ?$</p> <p>(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.20	0.04
2	0.33	0.36	0.21
3	0.22	0.25	0.18
4*	0.32	0.18	0.56
未作答	0.01		
通過率	0.32	鑑別度	0.37
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為 0.37，正確答案為選項 D，通過率為 32%，顯示三成的學生已能掌握畢氏定理解決應用問題。</p> <p>2. 有 12% 的學生選擇 A（低分組有 20%），有 33% 的學生選擇 B（低分組有 36%），有 22% 的學生選擇 C（低分組有 25%），這些學生尚未能掌握畢氏定理解決應用問題。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>S-5-1 三角形與四邊形的性質：操作活動與簡單推理。含三角形三內角和為 180 度。三角形任意兩邊和大於第三邊。平行四邊形的對邊相等、對角相等。 備註：簡單推理，例如：四邊形四內角和為 360 度，三角形不可能有兩鈍角。</p> <p>S-5-2 三角形與四邊形的面積：操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公式，並能應用。 備註：計算面積的問題，若採用分數或小數之邊長與高，必須在分數和小數的乘法後教學（N-5-5、N-5-8）。</p> <p>S-7-1 簡單圖形與幾何符號：點、線、線段、射線、角、三角形與其符號的介紹。</p>	<p>S-8-6 畢氏定理：畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形。</p>	<p>S-9-5 圓弧長與扇形面積：以 π 表示圓周率；弦、圓弧、弓形的意義；圓弧長公式；扇形面積公式。</p> <p>S-9-12 空間中的線與平面：長方體與正四面體的示意圖，利用長方體與正四面體作為特例，介紹線與線的平行、垂直與歪斜關係，線與平面的垂直與平行關係。 備註：S-5-6 僅教授「面與面的平行與垂直」，並且以操作活動為主。本條目則新增「空間中的線與線的垂直、平行、歪斜，以及線與面的平行與垂直」，且以理解數學概念為主。</p>

補救教學建議

- (一) 複習小學學過的長方形性質：有四個直角、對邊等長、對邊平行，對角線等長。
- (二) 複習三角形的性質，確認學生理解何謂直角三角形、鈍角三角形及銳角三角形。
- (三) 複習畢氏定理。



1. 先複習直角三角形。

2. 將四個相同的直角三角形擺成上圖，觀察圖中有大小兩個正方形，其邊長分別為 $(a+b)$ 和 c 。

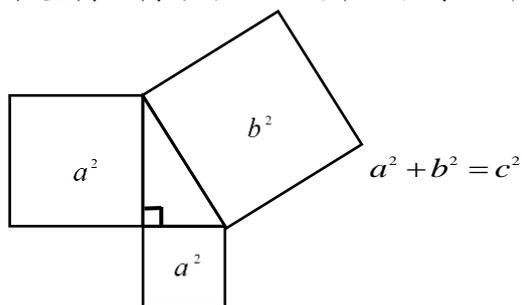
3. 調整直角三角形的位置，並補上 a^2 、 b^2 這兩個小正方形的邊，發現可以拼成另一個邊長亦為 $a+b$ 的正方形。

4. 觀察上述2、3兩個大正方形，由於其邊長皆為 $(a+b)$ ，故面積相等，因此

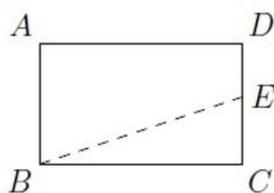
$$a^2 + b^2 + \frac{4 \times a \times b}{2} = c^2 + \frac{4 \times a \times b}{2}, \text{ 可推得 } a^2 + b^2 = c^2.$$

5. 最後歸納一下，並透過右圖說明畢氏定理：

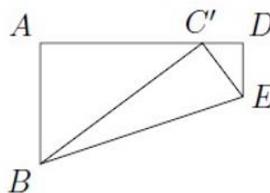
在直角三角形中，兩股平方和等於斜邊的平方。



(四) 以此題為例



圖(一)



圖(二)

由圖(一)圖(二)可知， $\overline{BC} = \overline{BC'} = 5$ ， $\overline{CE} = \overline{C'E}$

從直角 $\triangle ABC'$ 中計算出 $\overline{AC'}$

$$\overline{AC'}^2 = \overline{BC'}^2 - \overline{AB}^2$$

$$\overline{AC'} = \sqrt{\overline{BC'}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

從直角 $\triangle C'DE$ 中計算出 $\overline{CE} = \overline{C'E}$

設 $\overline{CE} = \overline{C'E} = x$ ，則 $\overline{DE} = 3 - x$

$$\overline{C'E}^2 = \overline{C'D}^2 - \overline{DE}^2$$

$$x^2 = (5 - 4)^2 + (3 - x)^2$$

$$x^2 = 1 + 9 - 6x + x^2$$

$$6x = 10$$

$$x = \frac{10}{6}$$

$$x = \frac{5}{3}$$

$$\text{所以 } \overline{CE} = \frac{5}{3}$$

題號	18		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-8-5 因式分解的方法：提公因式法；利用乘法公式與十字交乘法因式分解。 備註：只處理整係數 ax^2+bx+c 的因式分解或與乘法公式直接相關者，不處理一般二元齊次或二元非齊次式但有一次介入者。		
試題內容	18. 已知 $(17x-25)(12x-5) - (12x-5)(8x-13) = (ax-12)(bx+c)$ ，其中 a 、 b 、 c 皆為整數，則 $a+b-c = ?$ (A)26 (B)24 (C)-12 (D)-13		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.43	0.20	0.81
2	0.23	0.30	0.09
3	0.21	0.29	0.07
4	0.13	0.20	0.03
未作答	0.01		
通過率	0.43	鑑別度	0.61
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為0.61，正確答案為選項A，通過率為43%，顯示四成的學生已具備利用提公因式法因式分解的能力。 2. 有23%的學生選擇B(低分組有30%)，有21%的學生選擇C(低分組有29%)，也有有13%的學生選擇D(低分組有20%)，這些學生可能無法利用提公因式法因式分解，也可能在因式分解過程中係數計算錯誤。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	A-8-4 因式分解：因式的意義（限制在二次多項式的一次因式）；二次多項式的因式分解意義。	A-8-5 因式分解的方法：提公因式法；利用乘法公式與十字交乘法因式分解。 備註：只處理整係數 ax^2+bx+c 的因式分解或與乘法公式直接相關者，不處理一般二元齊次或二元非齊次式但有一次介入者。	A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。

補救教學建議

- (一) 幫助學生觀察一次單項式 ax 與一次多項式 $(x+b)$ 乘法對加法分配律展開過程，並化簡成二次多項式 ax^2+abx 。
- (二) 學生應可理解 $ax^2+abx=ax \cdot x+ax \cdot b$ ，根據乘法對加法分配律，學生應可得到 $ax \cdot x+ax \cdot b=ax(x+b)$ 。
- (三) 遇到較複雜的公因式，可以提示學生先將公因式代換成另一個變數，例如：因式分解 $x(ax+b)+k(ax+b)$ ，可以幫助學生將 $(ax+b)$ 設為 A ，原式改為 $xA+kA$ ，此時學生應可理解提出公因式 A 並將原式轉為 $A(x+k)$ ，接著將 A 還原成 $ax+b$ 得到因式分解後的式子為 $(ax+b)(x+k)$ 。
- (四) 底下以 $x(x+1)-3(x+1)$ 為例，說明如何幫助學生解題：
解：先與學生溝通，以 A 代表多項式 $x+1$ ，即 $x+1=A$ 。
所以 $x(x+1)-3(x+1)=x \cdot A-3 \cdot A=(x-3)A$ ，
最後再將 $A=x+1$ 代入上式得到 $(x-3)(x+1)$ 。

題號	19		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	F-8-1 一次函數：透過對應關係認識函數（不要出現 $f(x)$ 的抽象型式）、常數函數 ($y=c$)、一次函數 ($y=ax+b$)。		
試題內容	<p>19. 一次函數 $y = ax + b$，當 $x = 0$ 時，y 值為 10；當 $x = 2$ 與 $x = 3$ 時，對應 y 值的比為 3:2。則當 $x = 4$ 時，y 值為何？</p> <p>(A)-2 (B)-1 (C)1 (D)2</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.18	0.24	0.09
2	0.18	0.26	0.08
3	0.25	0.29	0.14
4*	0.39	0.20	0.69
未作答	0.01		
通過率	0.39	鑑別度	0.49
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為 0.49，正確答案為選項 D，通過率為 39%，顯示近四成的學生已掌握一次函數的概念。</p> <p>2. 有 18% 的學生選擇 A (低分組有 24%)，這些學生可能正確算出 $b=10$ 及 $a=-2$，但將 $a=-2$ 視為答案，這些學生可能部分掌握一次函數的概念。</p> <p>3. 有 18% 的學生選擇 B (低分組有 26%)，這些學生可能僅是猜測答案，尚未掌握一次函數的概念。</p> <p>4. 有 25% 的學生選擇 C (低分組有 29%)，這些學生可能未考量 $x=0$ 時 $y=10$，且將 3:2 視為真正的 y 值，而列出 $\begin{cases} 3 = 2a + b \\ 2 = 3a + b \end{cases}$ 解得 $a=-1$、$b=5$，一次函數為 $y=-x+5$，再將 $x=4$ 代入 $y=-x+5$ 得 $y=-4+5=1$，這些學生可能部分掌握一次函數的概念。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義： $ax + by = c$ 的圖形； $x = c$ 的圖形（水平線）； $y = c$ 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。 G-7-1 平面直角坐標系：以平面直角坐標系、方位距離標定位置；平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。	F-8-1 一次函數：透過對應關係認識函數（不要出現 $f(x)$ 的抽象型式）、常數函數（ $y=c$ ）、一次函數（ $y=ax+b$ ）。	F-9-1 二次函數的意義：二次函數的意義；具體情境中列出兩量的二次函數關係。 F-9-2 二次函數的圖形與極值：二次函數的相關名詞（對稱軸、頂點、最低點、最高點、開口向上、開口向下、最大值、最小值）；描繪 $y=ax^2$ 、 $y=ax^2+k$ 、 $y=a(x-h)^2$ 、 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形；對稱軸就是通過頂點（最高點、最低點）的鉛垂線； $y=ax^2$ 的圖形與 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形的平移關係；已配方好之二次函數的最大值與最小值。

補救教學建議

(一) 複習一次函數。

複習一次函數關係式 $y=ax+b$ 。

可舉情境例，透過觀察對應關係的規律性，進而表徵為 $y=ax+b$ ，認識一次函數。

例如：下表是攝氏溫度與華氏溫度的對應表。

攝氏溫度(°C)	0	10	20	30	40	50
華氏溫度(°F)	32	50	68	86	104	122

觀察出「攝氏每增加 10 度，華氏增加 18 度」，也就是「攝氏每增加 1 度，華氏增加 1.8 度」，而且當攝氏 0 度時，華氏 32 度。

因此以 $x^{\circ}\text{C}$ 代表攝氏溫度、 $y^{\circ}\text{F}$ 代表華氏溫度，攝氏溫度與相對應的華氏溫度之關係 $y=1.8x+32$ ，而關係如 $y=1.8x+32$ 稱為一次函數。

(二) 複習比與比例式。以「 $3:5=12:20$ 」為例。

$$\begin{array}{ccc} \times 4 & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} & 3 : 5 \\ = & 12 : 20 & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \times 4 \end{array}$$

$$\text{即 } \frac{12}{3} = \frac{20}{5} = 4$$

再以「 $3:5=x:12$ 」為例說明比例式的運算。

x 是 3 的 $\frac{x}{3}$ 倍數 $3 : 5$
 $= x : 20$ 20 是 5 的 $\frac{20}{5}$ 倍數
 相同的倍數

即 $\frac{x}{3} = \frac{20}{5}$ ，則 $x \cdot 5 = 20 \cdot 3$ ， $x = \frac{60}{5}$ 。

(三) 以本題為例，進行解題說明。

當 $x=0$ 時， $y=10$ ，則 $10=a \times 0+b$ 得 $b=10$ ，函數關係式可寫成 $y=ax+10$

$x=2$ 時， y 值是 $2a+10$

$x=3$ 時， y 值是 $3a+10$

兩個 y 值的比為 $3 : 2$

$$(2a+10) : (3a+10)$$

交叉相乘

$$\text{則 } = 3 : 2$$

$$3(3a+10) = 2(2a+10)$$

$$9a+30 = 4a+20$$

$$5a = -10$$

$$a = -2$$

所以 $y=-2x+10$

$x=4$ 時 $y=(-2) \times 4+10$

$$=2$$

題號	20		
內容領域	數與量	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-8-2 二次方根的近似值：二次方根的近似值；二次方根的整數部分；十分逼近法。使用計算機 $\sqrt{\quad}$ 鍵。 備註：二次方根的整數部分，可用幾何、十分逼近法、計算機求近似值。		
試題內容	20. 已知 $2 + 3\sqrt{a}$ 的整數部分為 10，其中 a 為正整數。求 $a = ?$ (A)5 (B)6 (C)7 (D)8		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.24	0.33	0.10
2	0.18	0.25	0.09
3	0.20	0.25	0.16
4*	0.36	0.17	0.64
未作答	0.01		
通過率	0.36	鑑別度	0.47
試題品質分析			
1. 本題鑑別度為0.47，正確答案為選項D，通過率為36%，顯示超過三成的學生已具備估計二次方根的近似值的能力。 2. 有24%的學生選擇A(低分組有33%)，有18%的學生選擇B(低分組有25%)，有20%的學生選擇C(低分組有25%)，這些學生尚未具備估計二次方根的近似值的能力。			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-7-6 指數的意義：指數為非負整數的次方； $a \neq 0$ 時 $a^0=1$ ；同底數的大小比較；指數的運算。 N-7-7 指數律：以數字例表示「同底數的乘法指數律」($a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 、 $(a^m)^n = a^{mn}$ 、	N-8-2 二次方根的近似值：二次方根的近似值；二次方根的整數部分；十分逼近法。使用計算機 $\sqrt{\quad}$ 鍵。 備註：二次方根的整數部分，可用幾何、十分逼近法、計算機求近似值。	N-10-1 實數：數線，十進制小數的意義，三一律，有理數的十進制小數特徵，無理數之十進制小數的估算，($\sqrt{2}$ 為無理數的證明)，科學記號數字的運算。 備註：定義科學記號數字的有效位數，在

	$(a*b)^n = a^n * b^n$ ，其中 m, n 為非負整數)；以數字例表示「同底數的除法指數律」($a^m / a^n = a^{m-n}$ ，其中 $m \geq n$ 且 m, n 為非負整數)。		運算之後應維持原本的有效位數。
--	--	--	-----------------

補救教學建議

(一) 複習平方根與根號數的運算(參見第 5 題)。

(二) 估計根號數的近似值，以 $2\sqrt{3}$ 為例

1. 化簡 $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ 。

2. 哪個數字連乘兩次會等於 12 呢？

$$\square \times \square = \sqrt{12} \times \sqrt{12} = 12$$

由 $3 \times 3 = 9$ 太小

$4 \times 4 = 16$ 太大

可知 $\sqrt{12}$ 介於 3 和 4 之間

(三) 以本題為例說明

$2 + 3\sqrt{a}$ 的整數部分為 10， $3\sqrt{a}$ 的整數部分為 $10 - 2 = 8$ ，

$$3\sqrt{a} = \sqrt{3^2 \times a} = \sqrt{9a} \text{ 的整數部分為 } 10 - 2 = 8$$

$$\sqrt{64} < \sqrt{9a} < \sqrt{81}$$

$$64 < 9a < 81$$

$$7\frac{1}{9} < a < 9$$

符合題意的 $a = 8$ 。

題號	21		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。		
試題內容	<p>21. 下列何者為一元二次方程式 $-x^2 + 4x - 1 = 0$ 的解？</p> <p>(一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解為 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$)</p> <p>(A) $x = -2 + \sqrt{3}$ 或 $x = -2 - \sqrt{3}$</p> <p>(B) $x = -2 + \sqrt{5}$ 或 $x = -2 - \sqrt{5}$</p> <p>(C) $x = 2 + \sqrt{3}$ 或 $x = 2 - \sqrt{3}$</p> <p>(D) $x = 2 + \sqrt{5}$ 或 $x = 2 - \sqrt{5}$</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.22	0.26	0.14
2	0.21	0.32	0.06
3*	0.44	0.23	0.74
4	0.13	0.18	0.05
未作答	0.01		
通過率	0.44	鑑別度	0.51
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.51，正確答案為選項C，通過率為44%，顯示超過四成的學生已具備套用公式解一元二次方程式的能力。</p> <p>2. 有22%的學生選擇A(低分組有26%)，這些學生可能了解 $a = -1, b = -4, c = -1$，但將係數代入公式出錯得到</p> $x = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times (-1) \times (-1)}}{2 \times 1} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}。$ <p>3. 有21%的學生選擇B(低分組有32%)，這些學生可能誤以為 $a = 1, b = -4, c = -1$，將係數代入公式得到 $x = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}。$</p> <p>4. 有13%的學生選擇D(低分組有18%)，這些學生可能誤以為 $a = -1, b = -4, c = 1$，將係數代入公式得到 $x = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times (-1) \times 1}}{2 \times (-1)} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{-2} = 2 \pm \sqrt{5}。$</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	A-8-5 因式分解的方法：提公因式法；利用乘法公式與十字交乘因式分解。 備註：只處理整係數 ax^2+bx+c 的因式分解或與乘法公式直接相關者，不處理一般二元齊次或二元非齊次但有一次介入者。	A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。	無
補救教學建議			
<p>(一) 視學生學習的狀況，說明公式解的推導過程。</p> <p>由一元二次方程式的一般式 $ax^2+bx+c=0$，推導出公式解：</p> $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (\text{同除以 } a, \text{ 使 } x \text{ 的平方項係數變成 } 1)$ $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (\text{將常數項移至等號右邊})$ $x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2 \quad (\text{等號左邊配成完全平方})$ $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{取平方根})$ $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ <p>(二) 說明其中 $b^2 - 4ac$ 為判別式，有以下三種可能：</p> <ol style="list-style-type: none"> $b^2 - 4ac > 0$，方程式 $ax^2 + bx + c = 0$，$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$，兩相異根。 $b^2 - 4ac = 0$，方程式 $ax^2 + bx + c = 0$，$x = \frac{-b}{2a}$，兩根相等。 $b^2 - 4ac < 0$，方程式 $ax^2 + bx + c = 0$，因負數沒有平方根，故無解。 <p>(三) 下面以「解 $x^2 + 5x + 2 = 0$」為例，說明如何幫助學生解題。</p> <ol style="list-style-type: none"> 複習配方法 例如：$x^2 + 2x + \square = (x + \Delta)^2 \rightarrow \square = 1^2 = 1, \Delta = 1$ $x^2 + 3x + \square = (x + \Delta)^2 \rightarrow \square = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}, \Delta = \frac{3}{2}$ 說明利用配方法解 $x^2 + 5x + 2 = 0$ 作法：$x^2 + 5x = -2$...先將常數項移到等號右邊 $x^2 + 5x + (\frac{5}{2})^2 = -2 + (\frac{5}{2})^2$...等號兩邊同時加 $(\frac{5}{2})^2$ 			

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

$$x + \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$x = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

3. 說明如何利用公式解 $x^2 - 5x - 2 = 0$ 。

先利用相反數將所有減法改記成加法，並將所有省略係「1」也還原，得 $x^2 - 5x - 2 = 1x^2 + (-5)x + (-2)$ 。

其次，比較標準方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 得 $a = 1$ 、 $b = -5$ 、 $c = -2$ 。

代入公式解得
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1},$$

經過計算，得
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}。$$

題號	22		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-8-5 等差級數求和：等差級數求和公式；生活中相關的問題。 備註：不處理「已知級數和反求首項、項數或公差」。		
試題內容	<p>22. 求等差級數 $(-9) + (-6) + (-3) + \dots + 96 + 99 = ?$</p> <p>(A)1350</p> <p>(B)1485</p> <p>(C)1620</p> <p>(D)1665</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.16	0.21	0.08
2	0.18	0.27	0.07
3	0.28	0.35	0.15
4*	0.36	0.16	0.69
未作答	0.01		
通過率	0.36	鑑別度	0.54
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.54，正確答案為選項D，通過率為36%，顯示超過三成的學生已具備等差級數求和公式的能力。</p> <p>2. 有16%的學生選擇A (低分組有21%)，這些學生可能錯誤使用等差數列公式，算成$99=9+n \times 3$，得$n=30$，而合理使用等差級數求和公式$\frac{[99+(-9)] \times 30}{2}=1350$，這些學生可能部分具備等差級數求和公式的能力。</p> <p>3. 有18%的學生選擇B (低分組有27%)，這些學生可能錯誤使用等差數列公式，算成$99=9+n \times 3$，得$n=30$，又錯誤使用等差級數求和公式$\frac{99 \times 30}{2}=1485$，這些學生可能尚未具備等差級數求和公式的能力。</p> <p>4. 有28%的學生選擇C (低分組有35%)，這些學生可能錯誤使用等差數列公式，$99=(-9)+n \times 3$，得$n=36$，而合理使用等差級數求和公式$\frac{[99+(-9)] \times 36}{2}=1620$，這些學生可能部分具備等差級數求和公式的能力。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	無	N-8-5 等差級數求和：等差級數求和公式；生活中相關的問題。	N-10-6 數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。
補救教學建議			
<p>(一) 複習等差級數求和公式。 以「求等差級數 $3+6+9+\dots+93+96+99$ 的和」為例，再引入等差級數求和公式。</p> $3 + 6 + 9 + \dots + 93 + 96 + 99$ <p>發現：三組的和都是 $3+99=102$ 慢慢加也可以，但有規律的總是有機會找到更好的方法 因此先多算一次，之後再除以 2 還原</p> $ \begin{array}{r} 3 \quad + 6 \quad + 9 \quad + \dots \quad + 93 \quad + 96 \quad + 99 \\ +) \quad 99 \quad + 96 \quad + 93 \quad + \dots \quad + 9 \quad + 6 \quad + 3 \\ \hline = \quad 102 \quad +102 \quad +102 \quad + \dots \quad +102 \quad +102 \quad +102 \\ = \quad 102 \quad \times 33 \end{array} $ <p>所以 $3+6+9+\dots+93+96+99 = \frac{(3+99) \times 3}{2}$ <small>利用等差數列公式：$99=3+(n-1) \times 3$，$n=33$</small></p> <p>再以一般式列出等差級數求和公式</p> $ \begin{array}{r} a_1 \quad + a_2 \quad + a_3 \quad + \dots \quad + a_{n-2} \quad + a_{n-1} \quad + a_n \\ +) \quad a_n \quad + a_{n-1} \quad + a_{n-2} \quad + \dots \quad + a_3 \quad + a_2 \quad + a_1 \\ \hline = \quad (a_1 + a_n) \times n \end{array} $ <p>所以 $a_1+a_2 + a_3+\dots + a_{n-2}+a_{n-1}+a_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$</p> <p>(二) 以本題為例，進行解題說明。</p> <ol style="list-style-type: none"> 透過等差數列公式求得項數 第 1 項為 -9，第 n 項為 99，公差為 $(-6)-(-9)=3$ 則 $99=-9+(n-1) \times 3$，$n=37$ 等差級數和的公式求和 $S_{37} = \frac{[99+(-9)] \times 37}{2} = 1665$ 			

題號	23		
內容領域	資料與不確定性	認知歷程向度	程序執行
學習內容	D-8-1 統計資料處理：累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。		
試題內容	<p>23. 下圖為 2021 年 12 月 25 日至 2021 年 12 月 31 日新冠肺炎累積確診人數圖。</p> <p style="text-align: center;">新冠肺炎累積確診人數</p> <p>設 12 月 30 日的確診人數為 a 人，12 月 26 日的確診人數為 b 人。 則 $a - b = ?$</p> <p>(A)0 (B)8 (C)25 (D)73</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.25	0.11	0.48
2	0.09	0.16	0.04
3	0.11	0.18	0.05
4	0.54	0.53	0.43
未作答	0.01		
通過率	0.25	鑑別度	0.36
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.36，正確答案為選項A，通過率為25%，顯示超過兩成的學生已掌握累積相對次數折線圖的基本概念。</p> <p>2. 9%的學生選擇B (低分組有16%)，11%的學生選擇C (低分組有18%)，54%的學生選擇D (低分組有53%)，這些學生尚未掌握累積相對次數折線圖的基本概念。</p>			

教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>D-7-1 統計圖表：蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原始資料或百分率的統計圖表：直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表。遇到複雜數據時可使用計算機輔助，教師可使用電腦應用軟體演示教授。</p> <p>D-7-2 統計數據：用平均數、中位數與眾數描述一組資料的特性；使用計算機的「M+」或「Σ」鍵計算平均數。</p>	<p>D-8-1 統計資料處理：累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。</p>	<p>D-9-1 統計數據的分布：全距；四分位距；盒狀圖。 備註：D-7-2 處理單一統計量（平均數、中位數、眾數）表達數據，本條目則傳達以盒狀圖描述數據的集中程度。</p> <p>D-9-2 認識機率：機率的意義；樹狀圖（以兩層為限）。 備註：以樹狀圖分析所有的可能性，國中階段以對稱性（節點相同）的樹狀圖為主。</p> <p>D-9-3 古典機率：具有對稱性的情境下（銅板、骰子、撲克牌、抽球等）之機率；不具對稱性的物體（圖釘、圓錐、爻杯）之機率探究。</p>

補救教學建議

(一) 累積的起點與終點：以開車的里程數為例

1. 里程表顯示的數字是車子開到現在累積的里程數，如下圖里程表所示，這輛車子開到現在累積了 998665km。

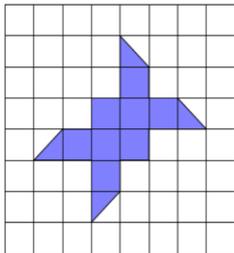
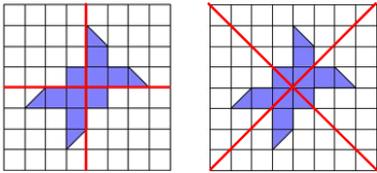
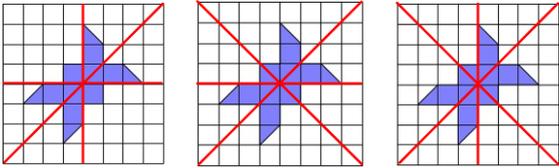
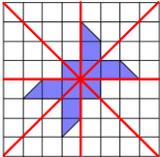


2. 想知道今天開車的里程數，會在出門時，以及回到家時做記錄。如果出門時為里程表顯示 998640km，回到家時里程表顯示 998665km，則今天開車的里程數=回到家時的里程表顯示的數字-出門時里程表顯示的數字=998665-998640=25(km)。
3. 想知道第 2 天開車的里程數，只要記錄第 1 天回家後里程表上顯示的數字和第 2 天回家後里程表上顯示的數字。
第 2 天開車的里程數=第 2 天回家後里程表上顯示的數字-第 1 天回家後里程表上顯示的數字。

(二) 以本題為例說明

$$a=12 \text{ 月 } 30 \text{ 日 累積 確診 人數 } - 12 \text{ 月 } 29 \text{ 日 累積 確診 人數} \\ = 16988 - 16964 = 24。$$

$$b=12 \text{ 月 } 26 \text{ 日 累積 確診 人數 } - 12 \text{ 月 } 25 \text{ 日 累積 確診 人數} \\ = 16915 - 16891 = 24。$$

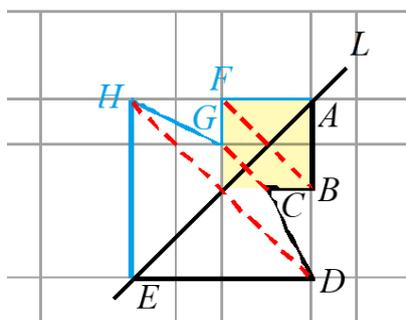
題號	24		
內容領域	空間形狀與坐標幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	S-7-4 線對稱的性質：對稱線段等長；對稱角相等；對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分。		
試題內容	<p>24. 如圖，著色的部份為一個線對稱圖形。</p>  <p>請問著色部分有多少條對稱軸？</p> <p>(A)1 (B)2 (C)3 (D)4</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.21	0.13	0.33
2	0.53	0.45	0.58
3	0.10	0.17	0.03
4	0.15	0.24	0.05
未作答	0.01		
通過率	0.21	鑑別度	0.20
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為0.20，正確答案為選項A，通過率為21%，顯示兩成的學生已具備運用線對稱性質解題的能力。</p> <p>2. 有53%的學生選擇B(低分組有45%)，這些學生可能誤以為對稱軸如下所示：</p>  <p>3. 有10%的學生選擇C(低分組有17%)，這些學生可能誤以為對稱軸如下所示：</p>  <p>4. 有15%的學生選擇D(低分組有24%)，這些學生可能誤以為對稱軸如下所示：</p> 			

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>S-5-4 線對稱:線對稱的意義。「對稱軸」、「對稱點」、「對稱邊」、「對稱角」。由操作活動知道特殊平面圖形的線對稱性質。利用線對稱做簡單幾何推理。製作或繪製線對稱圖形。 備註:從操作活動察覺正三角形、等腰三角形、正方形、長方形、菱形、箏形(箏形指圖形,名詞不出現)、等腰梯形是線對稱圖形(避免告知)。在教學呈現時,線對稱軸應為垂直或平行(操作活動不在此限)。可處理正多邊形。</p>	<p>S-7-4 線對稱的性質: 對稱線段等長; 對稱角相等; 對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分。</p>	<p>S-8-1 角:角的種類;兩個角的關係(互餘、互補、對頂角、同位角、內錯角、同側內角);角平分線的意義。 S-8-3 平行:平行的意義與符號;平行線截角性質;兩平行線間的距離處處相等。 S-8-4 全等圖形:全等圖形的意義(兩個圖形經過平移、旋轉或翻轉可以完全疊合);兩個多邊形全等則其對應邊和對應角相等(反之亦然)。</p>

補救教學建議

- (一) 透過對摺後重疊,幫助學生認識線對稱圖形的對稱邊相等、對稱角相等,並知道對稱軸兩側圖形全等。
- (二) 底下以利用一線對稱圖形,幫助學生建立線對稱圖形的觀念。
如下圖, L 是對稱軸,



可讓學生看圖形說出:

1. B 、 D 的對稱點分別為 F 、 H , 故 $\angle B = \angle F$ 、 $\angle D = \angle H$ 。
2. AB 的對稱邊為 AF , CD 的對稱邊為 GH 。
3. 對稱線段等長如 $AB = AF$, $CD = GH$ 。
4. 對稱軸 L 為 BF 、 CG 、 DH 的垂直平分線。
5. 對稱軸 L 為 $\angle FAB$ 、 $\angle HED$ 的角平分線。

題號	25		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	F-8-2 一次函數的圖形：常數函數的圖形；一次函數的圖形。		
試題內容	<p>25. 直角坐標平面上，某一次函數 $y = ax + b$ 的圖形通過 $(1, c)$、$(2, d)$ 兩點，其中 a、b 均為整數，且 $c > d > 0$。</p> <p>關於 a、b、c 三數的大小關係，下列何者正確？</p> <p>(A) $a > b > c$</p> <p>(B) $b > c > a$</p> <p>(C) $c > a > b$</p> <p>(D) $c > b > a$</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.16	0.25	0.06
2*	0.28	0.18	0.47
3	0.27	0.33	0.16
4	0.26	0.22	0.29
未作答	0.03		
通過率	0.28	鑑別度	0.29
試題品質分析			
<p>1. 本題鑑別度為 0.29，正確答案為選項 B，通過率為 28%，顯示近三成的學生已具備繪製一次函數圖形的能力。</p> <p>2. 有 16% 的學生選擇 A (低分組有 25%)，這些學生可能錯誤以為 $a > 0$，或者在不等式移項時發生錯誤。</p> <p>3. 有 27% 的學生選擇 C (低分組有 33%)，這些學生可能錯誤以為 $b < 0$，或者在不等式移項時發生錯誤。</p> <p>4. 有 26% 的學生選擇 D (低分組有 22%)，這些學生可能沒有看出函數圖形通過 $(0, b)$ 導致無法判斷 b、c 的大小，或者在不等式移項時發生錯誤。</p>			
教材地位分析			
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義： $ax + by = c$ 的圖形； $y = c$ 的圖形 (水平線)； $x = c$ 的圖形 (鉛垂線)；二元一次聯立方程式的解只處理相	F-8-2 一次函數的圖形：常數函數的圖形；一次函數的圖形。	F-9-1 二次函數的意義：二次函數的意義；具體情境中列出兩量的二次函數關係。 F-9-2 二次函數的圖形與極值：二次函數的相關名詞 (對稱軸、頂點、最低點、最高點、開口向上、開口向下、

	<p>交且只有一個交點的情況。</p> <p>G-7-1 平面直角坐標系：以平面直角坐標系、方位距離標定位置；平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。</p>	<p>最大值、最小值）；描繪 $y=ax^2$、$y=ax^2+k$、$y=a(x-h)^2$、$y=a(x-h)^2+k$ 的圖形；對稱軸就是通過頂點（最高點、最低點）的鉛垂線；$y=ax^2$ 的圖形與 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形的平移關係；已配方好之二次函數的最大值與最小值。</p> <p>F-9-2 二次函數的圖形與極值：二次函數的相關名詞（對稱軸、頂點、最低點、最高點、開口向上、開口向下、最大值、最小值）；描繪 $y=ax^2$、$y=ax^2+k$、$y=a(x-h)^2$、$y=a(x-h)^2+k$ 的圖形；對稱軸就是通過頂點（最高點、最低點）的鉛垂線；$y=ax^2$ 的圖形與 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形的平移關係；已配方好之二次函數的最大值與最小值。</p>
--	---	---

補救教學建議

建議教師以下列教學步驟幫助學生解題：

(一) 複習一次函數的圖形表徵。

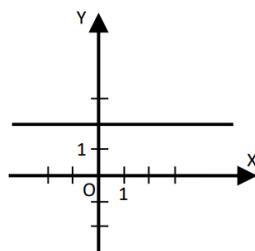
一次函數的關係式： $y=ax+b$ ，可分三種情況討論

1. 當 $a=0$ 時，一次函數 $y=b$

例如： $y=2$ ，也就是 $y=0 \times x + 2$

x	0	1	
y	2	2	

其函數圖形為一水平線

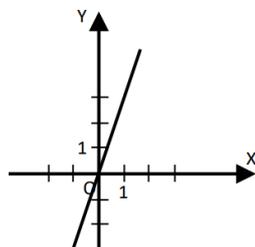


2. 當 $b=0$ 時，一次函數 $y=ax$

例如： $y=3x$

x	0	1	
y	0	3	

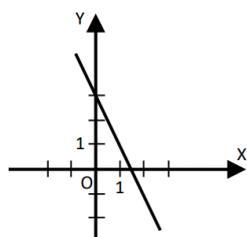
其函數圖形為通過原點，但非水平線和鉛垂線的一條直線



3. 當 $a \neq 0$ ， $b \neq 0$ 時， $y=ax+b$

例如： $y=-2x+3$

x	0	1	
y	3	1	



其函數圖形為不通過原點，也非水平線和鉛垂線的一條直線

(二) 以本題為例，進行解題說明：

一元一次函數 $y=ax+b$ ，其圖形通過 $(1,c)$ 和 $(2,d)$ ，且 $c > d > 0$ ，因此直線呈「左上右下」的傾斜。又函數 $y=ax+b$ 通過 $(0,b)$ ，故 $b > c > d > 0$ 。其次，分別將 $x=1$ 和 $x=2$ 代入 $y=ax+b$ 可得 $c=a+b > 2a+b=d$ ，解得 $a < 0$ 。綜合上述，即得 $b > c > d > a$ 。