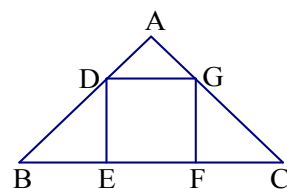
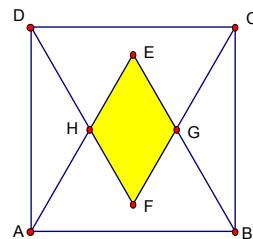


臺南市 2011 年公私立國民中學暨完全中學數學競賽

決賽試題

第一部分填充(每題 10 分，共 60 分)

1. 在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， M 為 \overline{BC} 上一點，已知 $\overline{AC} = 3$ ， $\overline{CM} = 5$ ，且 $\overline{BA} + \overline{BM} = \overline{AC} + \overline{CM}$ ，則 $\overline{BM} =$ _____。
2. 若 $\frac{3}{a} = \frac{2}{b-3c} = \frac{7}{c+2a}$ ，則 $\frac{a^2 + 2b^2 - 3c^2}{ab - 2bc} =$ _____。
3. 若 a, b 相異兩數，且滿足 $(a+2)^2 = 5 - 5(a+2)$ 和 $5(b+2) = 5 - (b+2)^2$ ，則 $a\sqrt{\frac{a}{b}} + b\sqrt{\frac{b}{a}} =$ _____。
4. 設 x, y 為實數，滿足 $(x - \sqrt{x^2 - 2011})(y - \sqrt{y^2 - 2011}) = 2011$ ，則 $2012x^2 - 2010y^2 + 2011x - 2011y - 2011$ 之值為_____。
5. 如圖，邊長為 1 的正方形 $ABCD$ 中，三角形 ABE 與三角形 CDF 都是正三角形， \overline{AE} 與 \overline{DF} 交於 H 點， \overline{BE} 與 \overline{CF} 交於 G 點，則四邊形 $EHFG$ 的面積為_____。
6. 如圖， $\triangle ABC$ 中，點 D, G 分別在邊 \overline{AB} 與 \overline{AC} 上，且點 E, F 在邊 \overline{BC} 上，使得四邊形 $DEFG$ 是正方形。如果 $\triangle ADG$ ， $\triangle BED$ 及 $\triangle CGF$ 的面積分別為 2、3、5，則正方形 $DEFG$ 的邊長為_____。



第二部分計算(每題 10 分，共 40 分)

1. 已知一直角三角形的周長為 $4 + \sqrt{26}$ ，且斜邊上的中線為 2，試求此直角三角形斜邊上的高。
2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 2\angle ACB$ ，試證：(1) $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{BC}$ (2) $\overline{AB} + \overline{BC} < 2\overline{AC}$
3. 試求滿足 $m^2 - 4n$ 及 $n^2 - 4m$ 皆為完全平方數（即某一整數的平方）的正整數解 (m, n) 。
4. 設 $m < 2011$ 為四位正整數，且正整數 $n < m$ ，如果 $m - n$ 最多有三個正因數且 mn 為完全平方數（即為某一整數的平方），試求 m 值。

填充 1. $\frac{15}{13}$ 2. $\frac{56}{5}$ 3. -21 4. 2011 5. $\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$ 6. $2\sqrt{2}$

詳解

1. 【參考解答】 Ans: $\frac{15}{13}$

$$(8-x)^2 = (x+5)^2 + 3^2 \Rightarrow x = \frac{15}{13}$$

2. 【參考解答】 Ans: $\frac{56}{5}$

$$\text{設 } \frac{3}{a} = \frac{2}{b-3c} = \frac{7}{c+2a} = \frac{1}{t}$$

$$\text{所以 } a=3t, b-3c=2t, c+2a=7t$$

$$\Rightarrow a=3t, b=5t, c=t$$

$$\text{故 } \frac{a^2+2b^2-3c^2}{ab-2bc} = \frac{9t^2+50t^2-3t^2}{15t^2-10t^2} = \frac{56}{5}$$

3. 【參考解答】 Ans: -21

由題意知 a, b 是二次方程式 $(x+2)^2 + 5(x+2) - 5 = 0$ 之相異兩根

$$\text{化簡 } (x+2)^2 + 5(x+2) - 5 = 0 \text{ 得 } x^2 + 9x + 9 = 0$$

$$\text{由根與係數關係知 } a+b=-9, ab=9$$

$$\Rightarrow a < 0, b < 0, \text{ 故}$$

$$a\sqrt{\frac{a}{b}} + b\sqrt{\frac{b}{a}} = a\sqrt{\frac{-a}{-b}} + b\sqrt{\frac{-b}{-a}} = a\frac{\sqrt{ab}}{-b} + b\frac{\sqrt{ab}}{-a} = -\frac{a}{b}\sqrt{ab} - \frac{b}{a}\sqrt{ab} = -\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}} = -\frac{(a+b)^2-2ab}{\sqrt{ab}} = -21$$

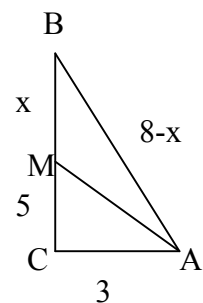
4. 【參考解答】 Ans: 2011

$$\text{依題意可得 } x - \sqrt{x^2 - 2011} = y + \sqrt{y^2 - 2011} \dots\dots\dots(1)$$

$$x + \sqrt{x^2 - 2011} = y - \sqrt{y^2 - 2011} \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{由 (1)+(2) 得 } x = y$$

$$\text{故原式可化為 } \left(x - \sqrt{x^2 - 2011}\right)^2 = 2011$$



$$\Rightarrow x^2 - 2011 = x\sqrt{x^2 - 2011}$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2011)^2 = x^2(x^2 - 2011)$$

$$\Rightarrow 2011(x^2 - 2011) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 2011$$

$$\text{故 } 2012x^2 - 2010y^2 + 2011x - 2011y - 2011 = 2x^2 - 2011 = 2011$$

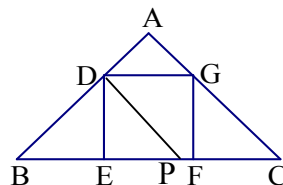
5. 【參考解答】 $\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$.

點 E 至線段 \overline{AB} 的距離為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 點 F 至 \overline{AB} 的距離為 $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\overline{EF} = 1 - 2 \cdot (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3} - 1, \text{ 且 } \angle HAD = 30^\circ, \overline{AD} = 1,$$

$$\therefore \text{點 } H \text{ 至 } \overline{AD} \text{ 的距離為 } \frac{\sqrt{3}}{6}, \therefore \overline{HG} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{故四邊形 } EHFG \text{ 的面積為 } (1 - \frac{\sqrt{3}}{3}) \cdot \frac{(\sqrt{3} - 1)}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1.$$



6. 【參考解答】 Ans: $2\sqrt{2}$ 。

過 D 作 $\overline{DP} \parallel \overline{CG}$, $\triangle DEP \cong \triangle GFC$, 其中 P 在 \overline{BC} 上, 故 $\triangle DEP$ 的面積為 5, $\therefore \triangle DBP$ 的面積為 8, 又 $\triangle ADG \square \triangle DBP$ 所以對應邊成比例且面積比等於邊長平方比,

$$\triangle ADG \square \triangle DBP \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{BP}}, \text{ 且 } \frac{\overline{AD}^2}{\overline{BD}^2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{DG}}{\overline{BP}}, \text{ 令正方形的邊長為 } x, \text{ 由}$$

$$\triangle DBP \text{ 的面積知, } \frac{1}{2} \cdot x \cdot \overline{BP} = 8 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x = 8 \therefore x = 2\sqrt{2}.$$

計算題

1. 【參考解答】 Ans: $\frac{5}{4}$

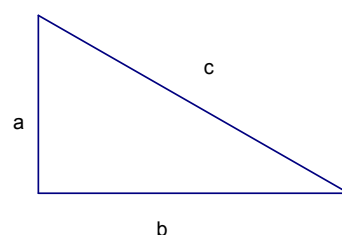
設直角三角形的兩股為 a 、 b , 斜邊為 c

$$\text{由 } a^2 + b^2 = c^2 = 4^2 \dots\dots \textcircled{1}, \text{ 可知 } c=4$$

$$\text{又 } a + b + c = 4 + \sqrt{26}, \text{ 可得 } a + b = \sqrt{26} \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2}^2 - \textcircled{1} \quad 2ab = 10$$

$$ab = 5$$



$$\text{三角形面積} = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}ab = \frac{5}{2}, \text{可得 } h = \frac{5}{4}$$

2. 【參考解答】如圖，

(1) 作 $\angle ABC$ 之平分線交 \overline{AC} 於 D 點

$$\because \angle ABC = 2\angle ACB, \therefore \angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle ACB$$

$\triangle ABD$ 與 $\triangle ACB$ 中， $\angle BAD = \angle BAC$ ， $\angle ABD = \angle ACB$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACB \text{ (AA 相似性質)} \quad \therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

$$\because \triangle BCD \text{ 爲等腰三角形} \quad \therefore \overline{BD} = \overline{CD} = \overline{AC} - \overline{AD}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \times \overline{CB} = \overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AC} \times (\overline{AC} - \overline{AD})$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \times \overline{CB} = \overline{AC}^2 - \overline{AC} \times \overline{AD}$$

$$\Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{AC} \times \overline{AD} + \overline{AB} \times \overline{CB}, \quad \text{又 } \overline{AB}^2 = \overline{AC} \times \overline{AD}$$

$$\therefore \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB} \times \overline{BC}$$

(2)

再過 A 作 \overline{BD} 的平行線交 \overline{BC} 的延長線於 E (如上圖)

$$\because \overline{AE} + \overline{AC} > \overline{CE} (\because \triangle ACE \text{ 爲等腰} \triangle \therefore \overline{AE} = \overline{AC})$$

$$\Rightarrow \overline{AC} + \overline{AC} > \overline{BC} + \overline{BE} (\because \triangle ABE \text{ 爲等腰} \triangle \therefore \overline{AB} = \overline{BE})$$

$$\Rightarrow 2\overline{AC} > \overline{BC} + \overline{AB}$$

3. 【參考解答】： $\because m^2 - 4n \geq 0$ 及 $n^2 - 4m \geq 0$

$$\Rightarrow 4m \leq n^2 \leq \frac{m^4}{16} \text{ 且 } m \geq 4$$

同理可證， $n \geq 4$ 且若 $m = 4 \Rightarrow n = 4$

$$\text{令 } m = n \Rightarrow m^2 - 4m = x^2 \Rightarrow (m-2)^2 - x^2 = 4 \Rightarrow (m-2-x)(m-2+x) = 4$$

因為左式兩項具有相同的奇偶性且 $m-2+x > 0$ ，

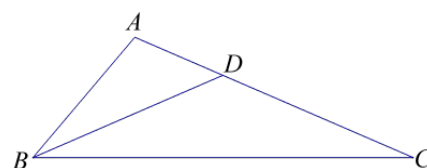
因此 $m-2-x = m-2+x = 2$ ，並可推得 $m = 4$ 。

另外由題目可知 m 、 n 有對稱性，不失一般性假設 $m > n \geq 5$

$$\text{可得 } x^2 = m^2 - 4n > m^2 - 4m = (m-3)^2 + 2m - 9 > (m-3)^2 + 2 \cdot 5 - 9 > (m-3)^2$$

$$\Rightarrow m^2 > x^2 > (m-3)^2$$

(i) 若 $x^2 = (m-2)^2$ ：



$$\Rightarrow m^2 - 4n = (m-2)^2 \Rightarrow n = m-1$$

$$\Rightarrow y^2 = n^2 - 4m = (m-1)^2 - 4m = m^2 - 6m + 1 = (m-3)^2 - 8$$

$$\Rightarrow (m-3+y)(m-3-y) = 8$$

因為左式兩項具有相同的奇偶性，則必為 $2 \cdot 4$ 之形式

$$\Rightarrow m = 6 \Rightarrow n = 5$$

(ii) 若 $x^2 = (m-1)^2$:

$$\Rightarrow m^2 - 4n = (m-1)^2 \Rightarrow 4n = 2m-1 \text{ (矛盾, 因為 } 4n \text{ 為偶數且 } 2m-1 \text{ 為奇數)}$$

由上述討論可得 $(m, n) = (4, 4), (5, 6), (6, 5)$

4. 【參考解答】

若 $m-n$ 至多有三個正因數，

則 $m-n = p^k$ ， p 為質數且 $k = 0, 1, 2$ 。

當 $k = 0$ ，則 $n(n+1)$ 為完全平方數（不合）

令 $m-n = p^k$ ， $mn = t^2$ ， $k \in \{1, 2\}$ ， t 為自然數，

$$\text{則 } n(n+p^k) = t^2 \Leftrightarrow (2n+p^k-2t)(2n+p^k+2t) = p^{2k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+p^k-2t = p^s \\ 2n+p^k+2t = p^r \end{cases}, r, s \text{ 為整數}, 0 \leq s < r \leq 2k, \text{ 且 } r+s = 2k$$

若 $k = 1$ ，則

$$\begin{cases} 2n+p-2t=1 \\ 2n+p+2t=p^2 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{(p-1)^2}{4}, m = n+p = \frac{(p+1)^2}{4}$$

又 $1000 \leq m < 2011$ ，

$$\Rightarrow m = 1156, 1296, 1369, 1600, 1764, \quad (p = 67, 71, 73, 79, 83)$$

當 $k = 2$ ，則 $(r, s) = (4, 0)$ 或 $(r, s) = (3, 1)$

$$(r, s) = (4, 0) \Rightarrow m = n + p^2 = \frac{(p^2+1)^2}{4} \quad (\text{無解})$$

$$(r, s) = (3, 1) \Rightarrow m = \frac{p(p+1)^2}{4}$$

$$\Rightarrow m = 1377 \text{ 或 } 1900 \quad (p = 17 \text{ 或 } 19)$$